

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEgeben VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN
F. MAGYAR-WIEN · E. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND II, HEFT 3

MIT 59 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 3. MÄRZ 1948)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwangslässig nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)

Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band II, Heft 3

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<i>Originalarbeiten.</i>	
R. Hofer, Doppelvierpol als regelbares Transformationsglied. (Mit 10 Textabbildungen.)	169
K. J. Müller, Die Temperaturverteilung in den Laufrädern von Turbomaschinen. (Mit 2 Textabbildungen.)	177
H. Parkus, Der wandartige Träger auf drei Stützen. (Mit 11 Textabbildungen)	185
F. Cap, Zum zweidimensionalen Feldproblem zweier leitenden Ebenen in beliebiger Lage. (Mit 14 Textabbildungen.)	201
K. Girkmann, Die Beanspruchung einer Druckschachtpanzerung bei unvollständiger Umstiegung. (Mit 5 Textabbildungen.)	211
L. Kirste, Eine Erweiterung der Steifigkeitsmethode. (Mit 3 Textabbildungen.)	226
F. Regler, Geometrische Optik bei Röntgenrückstrahlauflnahmen. (Mit 6 Textabbildungen.)	229
M. Ledinegg, Der Mechanismus der Turbulenz. (Mit 8 Textabbildungen.)	244
<i>Persönliches</i>	261
Eduard Doležal zum 85. Geburtstag.	
<i>Buchbesprechungen</i>	262
Musil L., Gasturbinenkraftwerke (H. Korst). — Saliger R., Die neue Theorie des Stahlbetons auf Grund der Bildsamkeit im Bruchzustand (F. Pongratz). — Kraemer F., Allgemeine Hochfrequenztechnik 1. Teil (L. Kneissler).	

Doppelvierpol als regelbares Transformationsglied.

Von R. Hofer, Wien.

Mit 10 Textabbildungen.

1. Allgemeines.

In der Sendertechnik besteht im besonderen Maße das Bedürfnis nach einem einfach bedienbaren Koppelglied, das eine regelbare Widerstandstransformation durchzuführen gestattet. Will man z. B. bei konstanter Gehaltener Anodenspannung der Senderöhren eine veränderbare Leistung aussenden, so muß der Belastungs-

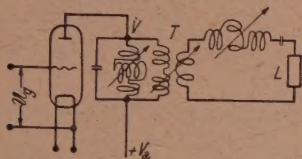


Abb. 1. Schema für die Lastankopplung an eine Langwellenstufe.

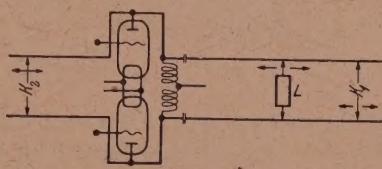


Abb. 2.

widerstand durch Kopplungsänderung regelbar transformiert werden. Auch bei Empfängern und Verstärkern gibt es verschiedene Probleme, für deren Lösung ein variables Transformationsglied von Nutzen ist.

Es bestehen wohl an sich keine Schwierigkeiten, einen derartigen Transformator zwischen der Lastabnahmestelle und dem Generator aufzubauen, aber meist erfordert namentlich in der Kurzwellentechnik eine Änderung der Übersetzung auch gleichzeitig eine Abstimmungskorrektur, also eine zusätzliche lästige Bedienung, wenn eine komplizierte Automatik vermieden werden soll.

Als Beispiele für eine regelbare Lasttransformation sind in Abb. 1 eine Langwellen-, in Abb. 2 eine Senderstufe für kurze Wellen schematisch angedeutet.

In Abb. 1 wird die Last mittels einer Koppelpule T angepaßt, wobei der Sperr- und Lastkreis für sich abgestimmt sind. Stärkere Kopplungsänderungen erfordern jedoch eine Korrekturabstimmung des Variometers V . In Abb. 2 ist das Schema einer Gegentaktstufe für kurze Wellen dargestellt, wobei die Last L über eine Energieleitung mit dem Sender gekoppelt ist. Die Übersetzungsänderung erfolgt hierbei durch Verschiebung der Lastanschlußstelle, wobei der Abschlußwiderstand vom Wellenwiderstand der Leitung abweichen muß. Gerade bei dieser Transformationsregelung ändert sich die Abstimmung ganz erheblich und bedarf einer Korrektur, wozu ein Kurzschließer auf der gleichen oder auf einer Parallelleitung dienen mag (K_1 und K_2).

Es soll hier eine Methode angegeben werden, die es gestattet, einen Ohmschen Belastungswiderstand ohne Verstimmung des Generatorkreises veränderbar zu transformieren. Als Koppelglied dienen zwei Vierpole, die sowohl zum Generator wie auch zum Verbraucher parallel liegen. Das Winkelmaß für die beiden Vierpole ist

veränderlich, doch muß, wie noch nachgewiesen wird, ihr Summenlaufzeitwinkel einer halben Wellenlänge oder einem ungeradzahligen Vielfachen hiervon entsprechen.

2. Untersuchung eines Doppelvierpoles mit konstantem resultierendem Winkelmaß.

In Abb. 3 ist eine geschlossene Energieleitung dargestellt, an der eine Spannung U_a und ein Belastungswiderstand β_e angeschlossen sind. Die beiden Leitungslängen zwischen U_a und β_e sind x' und x'' . Für die Berechnung der elektrischen Größen längs der Leitung benützen wir einen Hilfssatz aus der Vierpoltheorie, wonach ein Vierpol durch einen Zweipol ersetzt werden kann, dessen innere elektromotorische Kraft U_i der Leerlaufspannung entspricht, während der Innenwiderstand des Ersatzzweipoles β_i mit dem Vierpolwiderstand übereinstimmt, der sich bei Kurzschluß seiner Eingangsklemmen ergibt.

Auf diese Weise erhalten wir als Ersatzschaltbild für die Anordnung Abb. 3 die beiden gegeneinander geschalteten Zweipole, wie sie in Abb. 4 dargestellt sind. Die

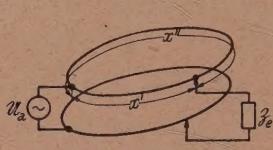


Abb. 3. Schema eines Doppelvierpoles mit der resultierenden Laufzeitlänge $x_m = x' + x''$.

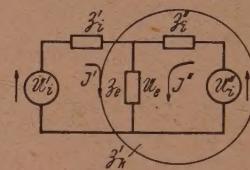


Abb. 4. Ersatzzweipol für den Vierpol der Abb. 3.

Pfeile deuten die für die Auswertung als positiv angenommenen Strom- und Spannungsrichtungen an. Aus den Spannungsgleichungen für die beiden Kreise

$$\begin{aligned} U_i' - \Im' \beta_i' - (\Im' + \Im'') \beta_e &= 0, \\ U_i'' - \Im'' \beta_i'' - (\Im' + \Im'') \beta_e &= 0 \end{aligned}$$

berechnen wir die Ströme an der Laststelle

$$\left. \begin{aligned} \Im' &= \frac{U_i' (\beta_i'' + \beta_e) - U_i'' \beta_e}{\beta_e (\beta_i' + \beta_i'') + \beta_i' \beta_i''}, \\ \Im'' &= \frac{U_i'' (\beta_i' + \beta_e) - U_i' \beta_e}{\beta_e (\beta_i' + \beta_i'') + \beta_i' \beta_i''}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Ersatzwerte für den Zweipol finden wir aus den bekannten Leitungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Im &= \Im_e \operatorname{Cof} \gamma + \frac{U_e}{\beta} \sin \gamma = \left(\Im_e \operatorname{Cof} \beta + \frac{U_e}{\beta} \sin \beta \right) \cos \alpha + \\ &\quad + j \left(\Im_e \sin \beta + \frac{U_e \operatorname{Cof} \beta}{\beta} \right) \sin \alpha, \\ U &= U_e \operatorname{Cof} \gamma + \Im_e \beta \sin \gamma = (U_e \operatorname{Cof} \beta + \Im_e \beta \sin \beta) \cos \alpha + \\ &\quad + j (U_e \sin \beta + \Im_e \beta \operatorname{Cof} \beta) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Hierin bedeuten U und \Im die Spannungs- und Stromwerte in einem gewählten Abstand x von der Belastungsstelle. Die Argumente der hyperbolischen Funktionen haben bekanntlich folgende Werte:

$$\gamma = \beta + j \alpha = (b + j a) x; \quad (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{x} = + \sqrt{\frac{1}{2} [Q_e X_l - A \varrho + \sqrt{(\varrho^2 + X_l) (A^2 + Q_e^2)}]}, \\ b &= \frac{\beta}{x} = + \sqrt{\frac{1}{2} [A \varrho - Q_e X_l + \sqrt{(\varrho^2 + X_l^2) (A^2 + Q_e^2)}]}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

A und ϱ bedeuten die Ableitung und den Längswiderstand pro Längeneinheit, ferner $\mathfrak{L}_e = \omega C_1$; $X_l = \omega L_1$ und C_1 , L_1 die Kapazität und Selbstinduktion ebenfalls pro Einheit der Länge und ω die Kreisfrequenz.

Für den Wellenwiderstand gilt die Beziehung

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\varrho + j X_l}{A + j \mathfrak{L}_e}}. \quad (4)$$

Koppelleitungen für verschiebbaren Lastanschluß werden wegen der mechanischen Erfordernisse vorwiegend als Luftleiter ausgebildet sein, wobei zur Halterung in diskreten Abständen möglichst verlustfreie Stützscheiben angeordnet sein müssen. Für die praktische Berechnung derartiger Leitungen wird es stets ausreichen, nur den Längswiderstand zu berücksichtigen und den Einfluß der Ableitung zu vernachlässigen. Da aber auch ϱ klein gegen X_l sein soll, können wir die Dämpfungsglieder von höherer als erster Ordnung auch vernachlässigen. Es gilt dann mit guter Näherung

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 - j z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} - j \frac{\varrho}{4\pi} \lambda \quad (4a)$$

Der Wellenwiderstand ist hier leicht kapazitiv. λ bedeutet die Wellenlänge.

Ferner gilt genügend genau:

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{2\pi}{\lambda}, \\ b = \frac{\varrho}{\mathfrak{Z}_0}. \end{array} \right\} \quad (3a)$$

Für die Ersatzgrößen unserer Vierpole erhalten wir aus Gl. (2), wenn wir mit γ' , γ'' die Argumente für die Leitungslängen x' , x'' verstehen,

$$\left. \begin{array}{ll} \mathfrak{U}_i' = \frac{\mathfrak{U}_a}{\mathfrak{C}\text{os} \gamma'}; & \mathfrak{U}_i'' = \frac{\mathfrak{U}_a}{\mathfrak{C}\text{os} \gamma''}; \\ \mathfrak{Z}_i' = \mathfrak{Z} \mathfrak{T}\text{g} \gamma'; & \mathfrak{Z}_i'' = \mathfrak{Z} \mathfrak{T}\text{g} \gamma''. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Infolge des symmetrischen Aufbaues der Schaltung in Abb. 4 und der Gl. (6) genügt es, die gesuchten Größen bloß für einen Vierpol anzuschreiben. Durch Vertauschen der Indizes erhält man dann stets den entsprechenden Wert für den parallelen Vierpol. Der gesamte Lastwiderstand für den Vierpol der Länge x' ist durch die Kombination der parallelgeschalteten Widerstände \mathfrak{Z}_e und $(\mathfrak{Z}_i'' - \frac{\mathfrak{U}_i''}{\mathfrak{Z}''})$ gegeben. Wir erhalten dann, wenn wir die Werte aus Gl. (1) für \mathfrak{Z}'' einsetzen und weiterhin $w' = \frac{\mathfrak{U}_i'}{\mathfrak{U}_i''}$ einführen,

$$\mathfrak{Z}_{k'} = -\frac{\mathfrak{Z}_e (\mathfrak{Z}_i' + w' \mathfrak{Z}_i'')}{\mathfrak{Z}_e (1-w') - w' \mathfrak{Z}_i''}. \quad (7)$$

Bei der weiteren Auswertung wollen wir Widerstandsproportionen einführen. Im besonderen definieren wir die Größe V_{el} :

$$V_{el} = \frac{2 \mathfrak{Z}_e}{\mathfrak{Z}}. \quad (8)$$

V_{el} ist im allgemeinen als komplexe Größe anzusehen. Wenn sie jedoch reell ist, bedeutet sie die Anpassung der Last an die beiden parallelgeschalteten Vierpole gleicher Länge $x' = x''$. Es würde $V_{el} = 1$ aussagen, daß die Last, sofern sie in der Mitte angekoppelt ist, den beiden parallelen Vierpolen angepaßt ist.

Setzen wir Gl. (6) in Gl. (7) ein, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Gl. (8) für den Abschlußwiderstand eines Vierpoles:

$$V_{k'} = \frac{\mathfrak{Z}_{k'}}{3} = -\frac{V_{el}}{2} \frac{\mathfrak{S}\text{in} \gamma' + \mathfrak{S}\text{in} \gamma''}{\frac{V_{el}}{2} (\mathfrak{C}\text{os} \gamma' - \mathfrak{C}\text{os} \gamma'') - \mathfrak{S}\text{in} \gamma''}. \quad (7a)$$

Nun ist die Spannung an der Last

$$U_e = (\mathfrak{J}' + \mathfrak{J}'') \beta_e = \mathfrak{J}' \beta_e' . \quad (9)$$

Aus den Leitungsgleichungen [Gl. (2)] finden wir, wenn wir für U_e Gl. (9) einsetzen und ferner $\mathfrak{J}_e = \mathfrak{J}'$ schreiben, für das Widerstandsverhältnis eines Vierpoles an der Quelle:

$$V_a' = \frac{\beta_a'}{\beta} = \frac{U_a}{\mathfrak{J}_a' \beta} = \frac{\frac{V_{el}}{2} \sin(\gamma' + \gamma'') + \sin \gamma' \sin \gamma''}{\sin \gamma'' \cos \gamma' + \frac{V_{el}}{2} [\cos(\gamma' + \gamma'') - 1]} . \quad (10)$$

V_a'' ergäbe für den zweiten Vierpol die Gl. (10) mit vertauschten Indizes γ', γ'' .

Das über beide Leitungsteile an die Spannungsquelle übertragene Leitwertverhältnis ergibt nach einigen Umformungen aus Gl. (10)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{V_a} &= \frac{3}{2 \beta_a} = \frac{1}{2 V_a'} + \frac{1}{2 V_a''} = \frac{3 (\beta_a' + \beta_a'')}{2 \beta_a' \beta_a''}, \\ \frac{1}{V_a} &= \frac{\sin(\gamma' + \gamma'') + V_{el} [\cos(\gamma' + \gamma'') - 1]}{V_{el} \sin(\gamma' + \gamma'') + 2 \sin \gamma' \sin \gamma''}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Hierbei haben wir zweckmäßigerweise in den Widerstandsproportionen V_k', V_a' , V_a die Leitungswiderstände β_k', β_a' , auf β jedoch β_a auf $\beta/2$ bezogen, da V_k', V_a' für einen Vierpol, V_a für die beiden parallelen Vierpole gilt.

Infolge der vorausgesetzten geringen Dämpfung können wir die Gl. (11) übersichtlicher darstellen, wenn wir auf trigonometrische Funktionen übergehen und uns der Näherungen bedienen:

$$\begin{aligned} e^\gamma &= e^\beta \cdot e^{j\alpha} = \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \dots\right) e^{j\alpha}, \\ e^{-\gamma} &= e^{-\beta} \cdot e^{-j\alpha} = \left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2} - \dots\right) e^{-j\alpha}. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir nun die Glieder β^n für $n \geq 2$, so ergibt sich annähernd:

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \alpha + j \beta \sin \alpha, \\ \sin \gamma &= \beta \cos \alpha + j \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Beziehen wir nun α_m und β_m auf die Gesamtlänge $x_m = x' + x''$, so erhalten wir für den gesamten Widerstand an der Spannungsquelle aus Gl. (11) und unter Berücksichtigung der Gl. (12)

$$\frac{V_a \beta}{2} = \beta_a = \beta \frac{\beta_m \cos \alpha_m + j \sin \alpha_m - \beta [\sin \alpha' \sin \alpha'' - j (\beta'' \sin \alpha' \cos \alpha'' + \beta' \cos \alpha' \sin \alpha'')]}{\beta (\beta_m \cos \alpha_m + j \sin \alpha_m) + 2 \beta_e (\cos \alpha_m - 1 + j \beta_m \sin \alpha_m)} . \quad (11a)$$

Aus dieser Gleichung übersehen wir leicht, wenn wir vorerst die Dämpfungsglieder $(\beta', \beta'', \beta_m)$ und den bei schwacher Dämpfung ebenfalls vernachlässigbaren Blindanteil von β außer acht lassen, daß der wesentliche imaginäre Teil von β_a für reelle Last β_e verschwindet, wenn $\sin \alpha_m = 0$ wird. Das bedeutet, daß bei ganzzahligem n für das Winkelmaß $\alpha_m = n \pi$ gelten muß. Da jedoch für geradzahlige Werte von n auch $\cos \alpha_m - 1 = 0$ wird und somit der Nenner der Gl. (11a) bis auf die Dämpfungsglieder verschwindet, findet eine blindwiderstandsfreie Transformation der reellen Last β_e für alle regelbaren Werte von α' nur bei ungeradzahligen Werten von n statt. Für ungeradzahliges n erhalten wir, wenn wir für die Supplementärwinkel $\sin \alpha'' = -\sin \alpha'$ und $\cos \alpha'' = -\cos \alpha'$ setzen, aus Gl. (11a)

$$\beta_a = \beta \frac{\beta \left[\sin^2 \alpha' + j \frac{\sin 2\alpha'}{2} (\beta'' - \beta') \right] + \beta_e \beta_m}{4 \beta_e + \beta_m \beta} . \quad (11b)$$

Wir sehen aus Gl. (11b), daß nur Glieder in der Größenordnung der Dämpfung einen Blindanteil ergeben. Bei weitgehend geringer Verlustdämpfung bleibt also bei einem Gesamtwinkelmaß der beiden Vierpole von $\alpha_m = n\pi$ (n ungerade) der an die Quelle übertragene Widerstand bei reeller Last ebenfalls reell, und zwar unabhängig von der Stelle des Lastanschlusses.

Bei Vernachlässigung der Dämpfungsglieder und des höchsten in der gleichen Größenordnung liegenden Blindanteils des Wellenwiderstandes erhalten wir in übersichtlicher Form, wenn wir wieder Gl. (8) einführen:

$$V_a = \frac{2 \beta_a}{3} = \frac{3 \sin^2 \alpha'}{2 \beta_e} = \frac{\sin^2 \alpha'}{V_{el}}. \quad (12)$$

Der Regelungsverlauf für die doppelt gespeiste $\lambda/2$ -Leitung ist in Abb. 5 veranschaulicht. Zwischen $\alpha' = (60^\circ \text{ bis } 90^\circ)$ fällt der Widerstand β_a nur wenig. Im Bereich $\alpha' = (30^\circ \text{ bis } 60^\circ)$ im Werteverhältnis 3 : 1, bei noch kleinerem α' wieder langsamer.

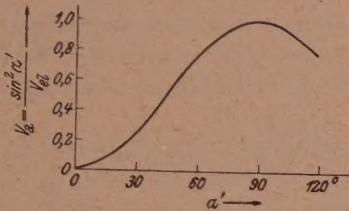


Abb. 5. Verlauf der Regelung des Übersetzungswertes eines $\frac{\lambda}{2}$ -Doppelvierpols.

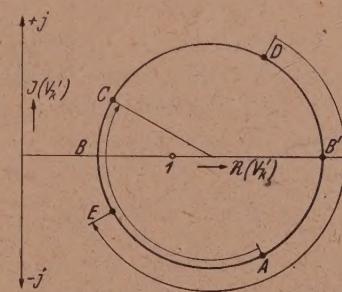


Abb. 6. Widerstandsverlauf längs des $\frac{\lambda}{2}$ -Doppelvierpols.

Bei komplexem Lastwiderstand β_e bleibt die Phasenlage von β_a unabhängig von der Regelstellung praktisch unverändert, nur wird immer der konjugiert-komplexe Widerstandswert an die Eingangsklemmen übertragen [β_e in Gl. (12) im Nenner!]. Man könnte diese Koppelleitung also auch für Meßzwecke verwenden, wenn die Forderung vorläge, Widerstände gleicher Richtung mit veränderlichem Absolutwert zu übertragen.

Der wichtigste Verwendungszweck unseres Koppelleiters wird als Transformationsglied für reelle Last gegeben sein.

Wir wollen nun noch untersuchen, inwieweit die unvermeidlichen Verluste möglichst klein gehalten werden können. Dazu müssen wir vor allem noch die Stromverteilung längs der Leitung ermitteln, und zwar wollen wir diese Rechnung unter der Annahme einer Ohmschen Last β_e durchführen. Für diese weitere Auswertung ist es zulässig, den Einfluß der Dämpfung auf die Stromverteilung gänzlich zu vernachlässigen. Aus Gl. (7a) finden wir für den dämpfungsfreien Fall

$$V_k' = -V_{el} \frac{j \sin \alpha'}{V_{el} \cos \alpha' - j \sin \alpha'} = V_{el} \frac{\sin^2 \alpha' - j V_{el}}{V_{el}^2 \cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha'}. \quad (7b)$$

Aus Gl. (10) finden wir

$$V_a' = \frac{\sin^2 \alpha'}{V_{el} - j \frac{\sin 2 \alpha'}{2}} = \frac{2 \sin^2 \alpha' (2 V_{el} + j \sin 2 \alpha')}{4 V_{el}^2 + \sin^2 2 \alpha'}. \quad (10a)$$

Aus den Gl. (7b) und (10a) ist unmittelbar zu ersehen, daß bei reellem V_{el} für $\alpha' < \frac{\pi}{2}$, also für die kürzere Speiseleitung V_k' kapazitiv-komplex und V_a' induktiv-komplex ist. Für die längere Leitung verhält es sich gerade umgekehrt. Ferner zeigen uns

diese Gleichungen, daß V_k' und V_k'' sowie V_a' und V_a'' stets konjugiert-komplexe Werte besitzen, da α' und α'' Supplementärwinkel sind.

Unter Zuhilfenahme der bekannten Regeln für das Kreisdiagramm der Widerstände von Energieleitungen erkennen wir folgenden Zusammenhang:

Wie immer auch der Wert der Lastanpassung für die Symmetriemitte sein möge ($V_{el} \geq 1$), stets hat die kürzere Leitung einen kapazitiv-komplexen Wert V_k' . Er sei durch den Punkt A auf dem gültigen Anpassungskreis in Abb. 6 gegeben. Längs der kurzen Leitung ändert sich der Belastungswiderstand von V_k' bis V_a' auf einen induktiv-komplexen Wert C an der Speisestelle und muß daher über den niedrigeren Ohmschen Wert B laufen. Auf dem längeren Leitungsstück gelangt man von dem zu A konjugiert-komplexen Wert D (V_k'') über den hohen reellen Wert B' nach E (V_a''), der wieder konjugiert-komplex zu C sein muß. Da der nicht bestrichene Teil des Kreises $C-D$ hinsichtlich Strom- und Spannungsverteilung dem zweimal bestrichenen Teil $A-E$ entspricht, folgern wir unmittelbar für unser Koppelglied bei Ohmscher Last:

1. Die effektive Strom- und Spannungsverteilung an der parallel gespeisten Energieleitung von $\lambda/2$ Gesamtlänge entspricht im wesentlichen dem einer einfach gespeisten Leitung für den gleichen Anpassungszustand. Der einzige Unterschied besteht darin, daß bei der doppelt gespeisten Leitung an den Anschlußklemmen der Last- und Spannungsquelle beim Übergang auf den anderen Vierpol die Ströme und Spannungen auf den konjugiert-komplexen Wert umspringen.

2. Der Strombauch ist unabhängig von der Regelstellung stets auf der kürzeren, das Spannungsmaximum auf der längeren Zuleitung zu finden. In den Grenzfällen, wenn die Last in der Leitungsmitte oder an der Spannungsquelle angeschlossen ist, liegen naturgemäß die Extreme von Strom und Spannung an diesen Stellen.

Bei komplexer Last β_e ist sowohl die Stromverteilung sowie auch die Fehlanpassung für die beiden Vierpole verschieden.

Aufschlußreich und für die Wahl geeigneter Betriebsbedingungen zur Vermeidung unnötiger Leitungsverluste bestimmend ist auch noch die sich ergebende Fehlanpassung k des Transformationsgliedes in Abhängigkeit von der Lastanpassung V_{el} und von der Regelstellung.

Nach der Leitungstheorie erhält man die Fehlanpassung k' für ein bestimmtes V_k' aus der Beziehung

$$\left. \begin{aligned} k' &= \frac{1 + |r'|}{1 - |r'|} = \frac{U_{a\max}}{U_{a\min}}, \\ r' &= \frac{1 - V_k'}{1 + V_k'}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hierbei bedeutet r' den Reflexionsfaktor des Vierpols mit dem Winkelmaß x' . Im Diagramm Abb. 7 ist k für reelle Werte von V_{el} in Abhängigkeit von der Regelstellung dargestellt. Der Parameter V_{el} stellt die Lastanpassung dar. Um die Verluste klein zu halten, soll k' im Regelbereich möglichst wenig vom Anpassungswert ($k' = 1$) abweichen. Zwischen $\alpha' = 30^\circ - 90^\circ$ verläuft die Kurve für $V_{el} = 1$ am günstigsten. Im Diagramm sind außerdem noch die Kurven für Lastüberanpassung ($V_{el} = 4$) und Unteranpassung ($V_{el} = 0.25$) aufgetragen. Am ungünstigsten verläuft k' bei Lastüberanpassung. Bei sehr kleinen Werten von α' ist die Lastunteranpassung sogar günstiger als die Anpassung. Dieses Ergebnis erscheint zunächst recht unerwartet. Indessen wird es ohne weiteres plausibel, wenn man sich die Ursache der Fehlanpassung durch den Kombinationswiderstand β_k' vergegenwärtigt. Der zu β_e parallel liegende zweite Vierpol wird die vorhandene Fehlanpassung, die durch die Last β_e gegeben ist, um so weniger beeinflussen, je kleiner der Lastwiderstand und damit V_{el} ist.

3. Leitungsverluste.

Aus der Gl. (2) können wir in einfacher Weise die Beziehung für den Wirkungsgrad η und für die Verlustleistung N_v ableiten, wenn wir das Winkelmaß des Vierpols von einem Extremwert an zählen und $V_k = \frac{3_0}{3}$ somit als reell annehmen.

Wir erhalten dann, wenn wir mit N_n die Nutzleistung bezeichnen, für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{N_n}{N_n + N_v} = \frac{\Im_e^2 3_0 V_k}{\Im_e \mathfrak{U}_\alpha \cos \varphi}, \quad (14)$$

wobei \Im allgemein nach Gl. (4a) $\Im = 3_0 \mp j z$ gesetzt wird. Das obere Vorzeichen gilt für überwiegende Längsverluste, das untere für vorherrschende Ableitungsverluste.

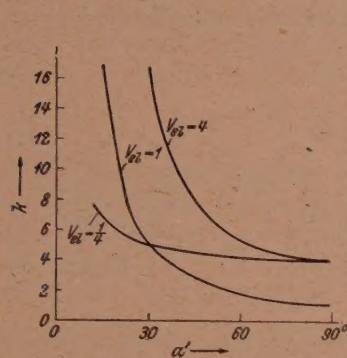


Abb. 7. Fehlanpassung in Abhängigkeit vom Regelnwinkel und vom Lastwiderstand.

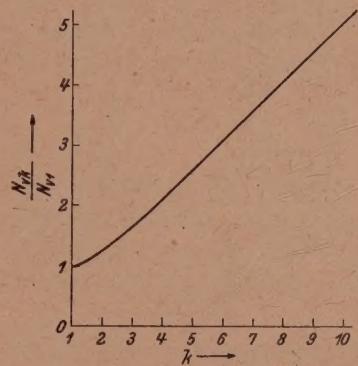


Abb. 8. Zunahme der Verluste mit der Fehlanpassung k .

$\Im_\alpha, \mathfrak{U}_\alpha$ bedeuten den Strom und die Spannung an der Stelle $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} x$, die um x vom reellen Extremwert V_e entfernt ist. φ ist der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung an der Stelle α . N_v gilt für das Leiterstück x .

Wir erhalten aus Gl. (2) und (14)

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{Cof} 2 \beta + \frac{1 + V_k^2}{2 V_k} \sin 2 \beta \pm \frac{z}{2 3_0} \frac{1 - V_k^2}{V_k} \sin 2 \alpha}. \quad (14a)$$

Die hyperbolischen Funktionen können wir wieder in Reihen auflösen und erhalten mit Berücksichtigung von Gl. (3a), wenn wir im Hinblick auf die kleinen Verluste β nur in erster Potenz berücksichtigen,

$$\frac{N_v}{N_n} = \frac{1 + V_k^2}{V_k} \frac{\varrho x}{2 3_0} \pm \frac{z}{2 3_0} \frac{1 - V_k^2}{V_k} \sin 2 \alpha. \quad (15)$$

Bei verzerrungsfreier Leitung wird $z = 0$ und demgemäß ist in Gl. (15) nur der erste Summand zu berücksichtigen. Bei Leitungsverzerrung mit überwiegenden Längsverlusten nehmen diese in der Umgebung des Strombauches zu, während sie im Spannungsbauch am niedrigsten sind. Bei vorherrschenden Querverlusten ist gerade das Umgekehrte der Fall. Berücksichtigen wir nur die Längsverluste, dann erhalten wir für ein Leitungsstück in der Nähe des Strommaximums mit Berücksichtigung der Gl. (3a), (4a) und wenn wir außerdem k aus der Gl. (13) einführen:

$$\left(\frac{N_v \Delta x}{N_n} \right)_{\max} = - \frac{\varrho \Delta x}{3_0} k. \quad (15a)$$

Für unseren $\lambda/2$ -Vierpol brauchen wir bei Berechnung der Gesamtverluste das zweite Glied der Gl. (15) nicht zu berücksichtigen, wenn wir eine Ohmsche Last übertragen, da dann nur die Gesamtverluste der $\lambda/2$ -Leitung eine Rolle spielen.

Bezeichnen wir mit $N_{v,k}$ und $N_{v,1}$ die Verluste bei Fehlanpassung und bei Anpassung, so erhalten wir für den $\lambda/2$ -Vierpol aus Gl. (15)

$$\frac{N_{v,k}}{N_{v,1}} = \frac{1 + k^2}{2k}. \quad (15b)$$

In Abb. 8 sind die prozentualen Verluste, bezogen auf die Anpassung, in Abhängigkeit von k dargestellt.

4. Anwendung des regelbaren Doppelvierpols in der Sendertechnik.

Grundsätzlich kann das beschriebene Transformationsglied auch für mittlere und lange Wellen angewendet werden, nur würde man dann die $\lambda/2$ -Leitung durch eine Leitungs nachbildung ersetzen. An jedem dieser Ersatzvierpole für die Leitung müß-

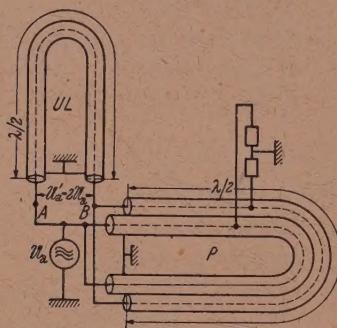


Abb. 9. Verwendung eines symmetrischen Doppelvierpols P bei unsymmetrischer Spannungsquelle, die mittels einer $\frac{\lambda}{2}$ -Umwegleitung an den Verbraucher angeschaltet ist.

wobei die Transformationsänderung nur schrittweise erfolgen könnte. Die Gliederzahl der Ersatzkettenleiter wäre dann durch das angestrebte Maß für die Regelungs unterteilung bestimmt.

Wie jedoch bereits in der Einleitung erwähnt wurde, besteht vorwiegend im Kurzwellenbau das Bedürfnis nach einem regelbaren Transformator, der bei Kopplungs änderung keinerlei Nachstimmung erfordert.

Bei Ankopplung des Verbraucherkreises an die Senderöhren hat man grundsätzlich zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

a) Gleichzeitige Symmetrie oder Unsymmetrie der Last- und Spannungsquelle gegen Erde,

b) Erdsymmetrie an den einen Anschlußklemmen und Unsymmetrie an den anderen.

Die Röhren des Generators sind bei Symmetrie in Gegentakt, bei Unsymmetrie in Gleichtakt geschaltet, an der Lastseite werden die Symmetrieverhältnisse meist durch Beschaffenheit des Strahlers bestimmt.

Während die Transformation bei verschiedenen Symmetrieverhältnissen im Bereich langerer Wellen leicht beherrscht wird, bedarf es bei kurzen Wellen wegen der schädlichen Kapazitäten, die bei induktiver Kopplung auftreten würden, besonderer Kunstschaltungen, um eine störungsfreie Übertragung bei ungleichen Symmetrieverhältnissen zu gewährleisten.

Als Symmetrisierungsschaltungen sind die $\lambda/2$ -Umwegleitung, die Symmetrierungsschleife und der $\lambda/4$ -Sperrtopf besonders bekannt geworden und haben in der Praxis entsprechende Verbreitung gefunden.¹

¹ W. Buschbeck. Die Entwicklung des transozeanischen Kurzwellen-Senderdienstes in Deutschland. Telefunken-Mitteilungen 20, März 1939, S. 24—29.

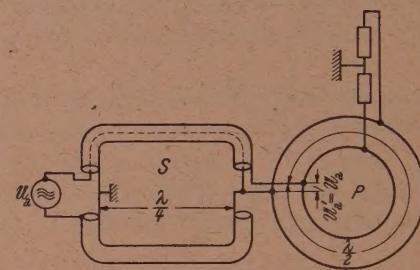


Abb. 10. Symmetrischer Doppelvierpol P über eine Symmetrierungsschleife S mit der unsymmetrischen Spannungsquelle verbunden.

ten dann eine entsprechende Zahl von Lastanschußklemmen vorgesehen werden,

wobei die Transformationsänderung nur schrittweise erfolgen könnte. Die Gliederzahl der Ersatzkettenleiter wäre dann durch das angestrebte Maß für die Regelungs unterteilung bestimmt.

Wie jedoch bereits in der Einleitung erwähnt wurde, besteht vorwiegend im Kurzwellenbau das Bedürfnis nach einem regelbaren Transformator, der bei Kopplungs änderung keinerlei Nachstimmung erfordert.

Bei Ankopplung des Verbraucherkreises an die Senderöhren hat man grundsätzlich zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

a) Gleichzeitige Symmetrie oder Unsymmetrie der Last- und Spannungsquelle gegen Erde,

b) Erdsymmetrie an den einen Anschlußklemmen und Unsymmetrie an den anderen.

Die Röhren des Generators sind bei Symmetrie in Gegentakt, bei Unsymmetrie in Gleichtakt geschaltet, an der Lastseite werden die Symmetrieverhältnisse meist durch Beschaffenheit des Strahlers bestimmt.

Während die Transformation bei verschiedenen Symmetrieverhältnissen im Bereich langerer Wellen leicht beherrscht wird, bedarf es bei kurzen Wellen wegen der schädlichen Kapazitäten, die bei induktiver Kopplung auftreten würden, besonderer Kunstschaltungen, um eine störungsfreie Übertragung bei ungleichen Symmetrieverhältnissen zu gewährleisten.

Als Symmetrisierungsschaltungen sind die $\lambda/2$ -Umwegleitung, die Symmetrierungsschleife und der $\lambda/4$ -Sperrtopf besonders bekannt geworden und haben in der Praxis entsprechende Verbreitung gefunden.¹

¹ W. Buschbeck. Die Entwicklung des transozeanischen Kurzwellen-Senderdienstes in Deutschland. Telefunken-Mitteilungen 20, März 1939, S. 24—29.

In den Abb. 10 und 9 sind als Beispiele die Anwendung der Symmetrisierungsschleife und der $\lambda/2$ -Umwegleitung in Verbindung mit dem regelbaren Doppelvierpol für den Fall angedeutet, daß die Last erdsymmetrisch, die Spannungsquelle unsymmetrisch angeordnet ist.

Die $\lambda/2$ -Umwegleitung dreht die Generatorenspannung in der Phase um 180° , wobei zwischen ihrer Eingangs- und Ausgangsklemme ($A\ B$ in Abb. 9) eine symmetrische Spannung entsteht. Im Gegensatz hierzu sorgt die Symmetrisierungsschleife lediglich für Erdsymmetrie ohne Spannungsänderung bei der Transformation. Die Umwegleitung erniedrigt demnach in der Schaltung Abb. 9 den Wert des Lastwiderstandes bei der Transformation im Verhältnis 1 : 4, während die Symmetrisierungsschleife den Widerstandswert bei der Übertragung unverändert läßt.

Zur Vermeidung von Verlusten würde man bei diesen Schaltungen die Wellenwiderstände der Symmetrisierungsglieder möglichst dem mittleren, nach Gl. (12) übertragenen Lastwiderstand angleichen.

Zusammenfassung.

Es wird eine geschlossene Energieleitung mit veränderbarer Lastanschlußstelle untersucht. Dabei findet man, daß dieser Doppelvierpol bei einem resultierenden Winkelmaß von π oder einem Vielfachen hiervon einen Regeltransformator darstellt, wobei unabhängig vom Übersetzungsverhältnis der Vektor des übertragenen Widerstandes keinerlei Phasenänderung erleidet.

Bei Ankopplung einer Ohmschen Last entspricht die effektive Strom- und Spannungsverteilung längs der Leitung der einer einseitig gespeisten $\lambda/2$ -Leitung bei gleicher Fehlanpassung.

Der Anpassungszustand bei reeller Lastabnahme in der Symmetriemitte der Leitung wird als Lastanpassung V_e definiert. Es wird gezeigt, daß sich bei großem Regelbereich eine Unteranpassung der Last hinsichtlich der Leitungsverluste am günstigsten verhält.

Der beschriebene Regeltransformator dürfte besonders in der Kurzwellentechnik Verwendung finden.

(Eingegangen am 24. Oktober 1946.)

Die Temperaturverteilung in den Laufrädern von Turbomaschinen.

Von K. J. Müller, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Die Laufradscheiben von Dampf- und Gasturbinen sowie von Hochleistungsverdichtern werden im Betrieb stark erwärmt. Diese entlang des Halbmessers ungleichmäßige Erwärmung weckt zusätzliche Spannungen, die sich den Fliehkräftebeanspruchungen der Scheibe überlagern. Da die Festigkeit der Scheibenbaustoffe ohnehin mit steigender Temperatur mehr oder weniger stark abnimmt, ist es deshalb wichtig, sich als Grundlage für die Ermittlung der Wärmespannungen, die man dann mit der entsprechenden Warmdauerfestigkeit des verwendeten Werkstoffes zu vergleichen hat, einen Aufschluß über die Temperaturverteilung in derartigen Laufrädern zu verschaffen.

Im allgemeinen herrschen an den beiden Seiten der Scheibe unterschiedliche Temperaturen des umgebenden Mittels. Handelt es sich um die Laufradscheibe eines Verdichters, so ist außerdem die Umgebungstemperatur an der einen, den Laufradkanälen zugekehrten Scheibenseite wegen der entwickelten Verdichtungswärme entlang des Halbmessers veränderlich. Allgemein gefaßt, liegt also die Aufgabe vor, die Temperaturverteilung in einer Scheibe zu suchen, die an beiden Seiten von Luft

unterschiedlicher bzw. veränderlicher Temperatur umspült wird und an deren Kranz Wärme entweder durch Leitung oder durch Konvektion zugeführt wird. Im Innern der Scheibe wird sich also die Temperatur sowohl in radialer als auch in axialer Richtung ändern.

In einem homogenen, rotationssymmetrischen Körper, als den man die Scheibe immer auffassen kann, folgt die stationäre Temperaturverteilung der Potentialgleichung, die in Polarkoordinaten die folgende Form hat:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt weniger darin, Lösungen dieser Gleichung zu finden, als in der zugehörigen Randwertaufgabe, d. h. also im Anpassen dieser Lösungen an die vorliegenden Randbedingungen. Eine vollständige Lösung gelingt in strenger Form nur für einen Kreiszylinder,¹ sie ist recht umständlich. Man wird daher nach Näherungslösungen suchen. Zu diesem Zweck werde zunächst die gut vertretbare Vereinfachung gemacht, den Temperaturverlauf in axialer Richtung jeweils durch eine konstante mittlere Temperatur ϑ_m , der sich ein mittleres lineares Gefälle $\bar{\vartheta}$ überlagert, zu ersetzen. Die Temperatur in einem Scheibenpunkt schreibt sich dann in der Form²

$$\vartheta = \vartheta_m + \frac{z}{h} \bar{\vartheta}, \quad (2)$$

worin nach obigen Voraussetzungen

$$\vartheta_m = \frac{1}{h} \int_h^0 \vartheta dz \quad \text{und} \quad \bar{\vartheta} = \frac{12}{h^2} \int_h^0 \vartheta z dz \quad (3)$$

ist. Um zu einem Ausdruck für den ersten kennzeichnenden Mittelwert ϑ_m zu kommen, werde Gl. (1) über die Scheibendicke integriert.³ Es ergibt sich

$$\int_h^0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dz + \int_h^0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz = 0.$$

Durch zweimalige Anwendung der bekannten Regeln über die Differentiation eines Integrals nach einem Parameter

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_a^b y dz = \int_a^b \frac{\partial y}{\partial r} dz + y(b, r) \frac{db}{dr} - y(a, r) \frac{da}{dr} \quad (4)$$

wird daraus

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} \int_h^0 \vartheta dz + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \int_h^0 \vartheta dz - \frac{1}{2} \frac{dh}{dr} \frac{\partial}{\partial r} (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{1}{2} \frac{dh}{dr} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_2 \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dr^2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{1}{2r} \frac{dh}{dr} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Hierin beziehen sich die Zeiger 1 und 2 auf die Punkte auf den Scheibenoberflächen $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$. Auf diesen Oberflächen gilt die Übergangsbedingung

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha (t - \vartheta), \quad (6)$$

wenn t die Temperatur des umgebenden Stoffes und n die Richtung der Oberflächen-

¹ Vgl. z. B. R. Weyrich: Die Zylinderfunktion und ihre Anwendung. B. G. Teubner, 1937.

² G. Eichelberg: Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Verbrennungsmotoren. VDI-Forsch.-Heft 263.

³ K. Marguerre: Temperaturverlauf und Wärmespannungen in platten- und schalenförmigen Körpern. Ing.-Arch. 8, 216 (1937).

normalen in dem betrachteten Punkt bedeutet. Die Ableitung nach dieser Richtung ist gegeben durch

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \cos \Phi + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \sin \Phi,$$

worin Φ die Neigung der Scheibenprofillinie $h(r)$ gegen die radiale, achsennormale Richtung angibt. Da umlaufende Scheiben immer ein verhältnismäßig schlankes Profil aufweisen, d. h. es ändert sich h nur langsam entlang r , so ist Φ sehr klein; es ist dann gestattet, $\sin \Phi = \operatorname{tg} \Phi = \frac{dh/2}{dr}$ und $\cos \Phi = 1$ zu setzen. In Verein mit

Gl. (6) gewinnt man dadurch den folgenden Ausdruck für $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\alpha}{\lambda} (t - \vartheta) + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \cdot \frac{1}{2} \frac{dh}{dr}, \quad (7)$$

der in Gl. (5) eingesetzt, dieser die Form

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \int \vartheta dz + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int \vartheta dz - \frac{h'}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{h''}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \\ - \frac{1}{r} \frac{h'}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{\alpha_2}{\lambda} (t_2 - \vartheta) + \frac{\alpha_1}{\lambda} (t_1 - \vartheta) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

gibt (Striche bedeuten hier Ableitungen nach r). Darin können die Integralausdrücke durch die eingangs getroffene Festlegung (2) und die weitere daraus abgeleitete Beziehung

$$\alpha_1 \vartheta_1 + \alpha_2 \vartheta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \vartheta_m + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\bar{\vartheta}}{2}$$

ersetzt werden, so daß sich schließlich

$$\vartheta_m'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) \vartheta_m' - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \vartheta_m - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2 \lambda h} \bar{\vartheta} = - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\lambda h} \quad (9)$$

ergibt.

Damit ist eine Grundgleichung des Problems gefunden. In ähnlicher Weise kann eine Gleichung für den zweiten kennzeichnenden Mittelwert $\bar{\vartheta}$ abgeleitet werden. Multipliziert man Gl. (1) mit z und integriert über die Scheibendicke, so liefert dies

$$\int_h \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} z dz + \int_h \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} z dz + \int_h \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} z dz = 0.$$

Auf die beiden ersten Glieder dieses Ausdruckes können wieder die Regeln der Gl. (4) sinngemäß angewendet werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \int \vartheta z dz + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int \vartheta z dz - \frac{h h'}{4} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_2 - \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_1 \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h h'}{4} \vartheta_2 - \frac{h h'}{4} \vartheta_1 \right) - \\ - \frac{1}{r} \frac{h h'}{4} (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \left| z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_1 - \vartheta \right|^2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

In das letzte, durch Teilintegration erhaltene Glied ist die Beziehung (7) einzuschlieben. Außerdem folgt aus Gl. (2)

$$\alpha_2 \vartheta_2 - \alpha_1 \vartheta_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \vartheta_m + (\alpha_2 + \alpha_1) \frac{\bar{\vartheta}}{2}$$

so daß damit schließlich die Gl. (17) in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) \bar{\vartheta}' - \left[\left(\frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{h''}{h} + \frac{1}{r} \frac{h'}{h} + \frac{12}{h^2} \right] \bar{\vartheta} - \frac{6}{\lambda h} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \bar{\vartheta} - \\ - \frac{6}{\lambda h} (\alpha_2 - \alpha_1) \vartheta_m = - \frac{6}{\lambda h} (\alpha_2 t_2 - \alpha_1 t_1) \end{aligned} \quad (11)$$

übergeht.

Damit ist die Aufgabe auf die Lösung der beiden simultanen Differentialgleichungen (9) und (11) zurückgeführt, was allgemein dadurch geschehen kann, daß

die durch Elimination einer Unbekannten entstehende Differentialgleichung vierter Ordnung integriert wird.

Bei Turbinenscheiben werden die Temperaturen t_1 und t_2 an den beiden Scheibenseiten zwar verschieden, im allgemeinen aber entlang des Halbmessers unveränderlich sein. Bei den Laufradscheiben von Verdichtern ist dies jedoch nicht der Fall. Durch die Verdichtung der Luft in dem Laufradkanal tritt eine Erwärmung ein; so daß hier nur an einer Scheibenseite, der Laufradaußenseite, mit unveränderlicher Temperatur gerechnet werden kann. Die gesamte Temperatursteigerung der Luft in dem Laufrad beträgt

$$\Delta t = \frac{A}{c_p} \frac{u^2}{2g} \frac{q_{ad}}{\eta_{i-ad}}. \quad (12)$$

Hierin bedeutet u die Umfangsgeschwindigkeit, q_{ad} die der Beschaufelung eigene Güteziffer und η_{i-ad} den adiabatischen Wirkungsgrad des Laufrades. Die Verteilung des Temperaturanstieges entlang des Halbmessers hängt zwar von der Schaufelform ab, befolgt aber im wesentlichen das Gesetz (12) in der Form

$$\Delta t = k_v \omega^2 r^2. \quad (13)$$

Für Hochleistungsräder mit radialen Schaufeln kann man $k_v = 1/1000$ setzen; bei rückwärts gekrümmten Schaufeln wird dieser Wert etwas kleiner. In die Gl. (9) und (11) ist also allgemein für die Temperatur an der einen Schaufelseite $t_2 = \text{konst.}$ und an der anderen Seite

$$t_1 = t_0 + k_v \omega^2 r^2 \quad (14)$$

einzusetzen, wobei im Falle des konstanten t_1 der Faktor k_v verschwindet.

Führt man zur Abkürzung der Schreibweise den linearen Differentialoperator

$$U(y) = y'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) y' - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} y \quad (15)$$

ein und benutzt man ferner die Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2 \lambda h}, & \varphi &= - \left[\left(\frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{h''}{h} + \frac{1}{r} \frac{h'}{h} + \frac{12}{h^3} + 2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \right], \\ m_2 &= \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1)}{\lambda h}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

so können die Gl. (9) und (11) wie folgt geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} U(\vartheta_m) &= m_1 \bar{\vartheta} - \frac{\alpha_1}{\lambda h} (t_0 + k_v \omega^2 r^2) - \frac{\alpha_2 t_2}{\lambda h}, \\ U(\bar{\vartheta}) + \varphi \bar{\vartheta} &= m_2 \vartheta_m + 6 \frac{\alpha_1}{\lambda h} (t_0 + k_v \omega^2 r^2) - 6 \frac{\alpha_2 t_2}{\lambda h}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die vollständigen Integrale dieser Gleichungen setzen sich zusammen aus einem Integral der homogenen Gleichungen, bei denen die Störungsfunktion wegfällt, und aus einem additiven Integral der ungekürzten Gleichungen. Zunächst sollen die Integrale der homogenen Differentialgleichungen ermittelt werden. Die Gl. (17) lauten ohne Störungsfunktion

$$U(\vartheta_m) = m_1 \bar{\vartheta}. \quad (18)$$

$$U(\bar{\vartheta}) + \varphi \bar{\vartheta} = m_2 \vartheta_m. \quad (19)$$

Durch Eliminieren von $\bar{\vartheta}$ bzw. von ϑ_m erhält man daraus unschwer

$$U U(\vartheta_m) + \varphi U(\vartheta_m) - m_1 m_2 \vartheta_m = 0 \quad (20)$$

oder

$$U U(\bar{\vartheta}) + U(\varphi \bar{\vartheta}) - m_1 m_2 \bar{\vartheta} = 0. \quad (21)$$

Die Weiterführung der Rechnung hängt nun von der Lösung einer dieser beiden Differentialgleichungen vierter Ordnung ab. Man kann versuchen, z. B. Gl. (20)

in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzuspalten, für welche die besondere Annahme⁴

$$U(\vartheta_m) + c \vartheta_m = 0 \quad (22)$$

gemacht werde, worin c eine Konstante sei, über die noch verfügt werden kann. Durch Ausführen der Differentialoperation U an Gl. (22) geht diese über in

$$U U(\vartheta_m) + c U(\vartheta_m) = 0.$$

Durch Eliminieren von $U U(\vartheta_m)$ und $U(\vartheta_m)$ aus den Gl. (20) und (22) folgt damit

$$c^2 - \varphi c - m_1 m_2 = 0. \quad (23)$$

Diese Gleichung verlangt, weil c , m_1 und m_2 unveränderlich sind, auch

$$-\varphi = \frac{h''}{h} + \left(\frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{1}{r} \frac{h'}{h} + \frac{12}{h^2} + \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\lambda h} = \text{konst.} \quad (24)$$

Sie hat die Wurzeln

$$c_1 = \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} + m_1 m_2} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{\varphi}{2} - \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} + m_1 m_2}. \quad (25)$$

Gehorcht also die Scheibendicke der Beziehung (24), so geht demnach die Differentialgleichung vierten Ordnung (20) über in die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\left. \begin{array}{l} U(\vartheta_m) + c_1 \vartheta_m = 0, \\ U(\vartheta_m) + c_2 \vartheta_m = 0. \end{array} \right\} \quad (26)$$

Sind die beiden vollständigen Integrale dieser Gleichungen ermittelt in der Form

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_{mI} = a_1 \vartheta_{mI} + a_2 \vartheta_{m2}, \\ \vartheta_{mII} = a_3 \vartheta_{m3} + a_4 \vartheta_{m4}, \end{array} \right\} \quad (27)$$

worin mit a die verfügbaren Integrationskonstanten bezeichnet werden, so kann die Lösung von Gl. (21) aus Gl. (18) entnommen werden:

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{m_1} \cdot U(\vartheta_m). \quad (28)$$

Sie ergibt in Verbindung mit Gl. (26) schließlich

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\vartheta}_I = -\frac{c_1}{m_1} \vartheta_{mI}, \\ \bar{\vartheta}_{II} = -\frac{c_2}{m_1} \vartheta_{mII}. \end{array} \right\} \quad (29)$$

Die verwickelte Bedingungsgleichung (24) für die Gültigkeit des Ansatzes (22) soll nicht näher untersucht werden. Man erkennt jedoch sofort, daß sie den wichtigen Fall $h = \text{konst.}$ einschließt, und nur dieser Fall werde hier weiter verfolgt. Hierdurch treten folgende Vereinfachungen ein

$$\varphi = -\frac{12}{h^2} - 2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \quad c_{1,2} = \frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} + \frac{3(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\lambda^2 h^2}}, \quad (30)$$

so daß die beiden Differentialgleichungen (26) nunmehr lauten:

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_m'' + \frac{1}{r} \vartheta_m' - \psi_1^2 \vartheta_m = 0, \\ \vartheta_m'' + \frac{1}{r} \vartheta_m' - \psi_2^2 \vartheta_m = 0, \end{array} \right\} \quad (31)$$

worin

$$\psi_{1,2}^2 = \left(\frac{6}{h^2} + 2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \right) \pm \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} + \frac{3(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{2 h^2}} \quad (32)$$

⁴ E. Meißner: Über die Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 23 (1915).

gesetzt ist. Die Lösungen dieser Besselschen Differentialgleichungen werden durch Zylinderfunktionen dargestellt. Sie lauten in abgekürzter Schreibweise:⁵

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{m1} &= Z_0(i\psi_1 r), \\ \vartheta_{m2} &= Z_0(i\psi_2 r). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Man erhält damit die allgemeine Lösung von Gl. (18) und (19) gemäß Gl. (27) und (29), nunmehr ausführlich geschrieben:

$$\vartheta_m = a_1 J_0(i\psi_1 r) + a_2 i H_0^{(1)}(i\psi_1 r) + a_3 J_0(i\psi_2 r) + a_4 i H_0^{(1)}(i\psi_2 r). \quad (34)$$

$$\bar{\vartheta} = -\frac{c_1}{m_1} [a_1 J_0(i\psi_1 r) + a_2 i H_0^{(1)}(i\psi_1 r)] - \frac{c_2}{m_1} [a_3 J_0(i\psi_2 r) + a_4 i H_0^{(1)}(i\psi_2 r)]. \quad (35)$$

J_0 ist die Besselfunktion nullter Ordnung, $H_0^{(1)}$ die Hankelsche Funktion erster Art von der Ordnung Null. Die vollständige Lösung des Systems (17) ist noch um zwei partikuläre Integrale zu vermehren. Legt man den Nullpunkt der Temperaturskala nach t_2 , so lauten diese im vorliegenden Fall

$$\vartheta_m = A_0 + A_2 r^2. \quad (36)$$

$$\bar{\vartheta} = B_0 + B_2 r^2. \quad (37)$$

Darin bedeuten:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{b p_2 + 6 b q}{p_1 p_2 - 12 q^2}; & B_2 &= -\frac{6 b p_1 + 12 b q}{p_1 p_2 - 12 q^2}; \\ A_0 &= \frac{p_2(a + 4 A_2) + q(6a - 4 B_2)}{p_1 p_2 - 12 q^2}; & B_0 &= -\frac{p_1(6a - 4 B_2) + 12 q(a + 4 A_2)}{p_1 p_2 - 12 q^2} \end{aligned}$$

mit

$$p_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h}; \quad p_2 = \frac{12}{h^2} + 3 p_1; \quad q = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda h};$$

$$a = \frac{\alpha_1}{\lambda h} t_0; \quad b = \frac{\alpha_1}{\lambda h} k_v \omega^2.$$

Nunmehr müssen die Integrationskonstanten aus den Randbedingungen ermittelt werden. Je nachdem, ob man die von der Welle abgeleitete Wärmemenge vernachlässigen kann oder nicht, ist entweder im Mittelpunkt der Scheibe, d. h. für $r = 0$, der Gradient der mittleren Temperatur Null oder es ist am Übergang der Scheibe in die Welle beim Halbmesser $r = r_0$ die mittlere Temperatur ϑ_m durch die Temperatur der Welle vorgeschrieben. Am Außenrand herrschen bei Turbinen- und bei Verdichterscheiben verschiedene Bedingungen. Bei Verdichterrädern tritt wegen der hier fast immer sehr kleinen Dicke kaum eine nennenswerte Wärmemenge über. Daher kann man immer

$$Q_{r=r_a} = \lambda 2 \pi r_a h_a \frac{d\vartheta_m}{dr} \Big|_{r=r_a} = 0 \quad (38)$$

setzen. Der Gradient $\frac{d\vartheta_m}{dr}$ wird aus der Summe der Ausdrücke (34) und (36) unter Beachtung der Regeln über die Differentiation von Zylinderfunktionen

$$\frac{dZ_0(ky)}{dy} = -k Z_1(ky) \quad (39)$$

gefunden. Das mittlere Quergefälle kann am Außenrand Null gesetzt werden.

Bei Turbinenscheiben sind die Bedingungen am Außenrand etwas komplizierter. Hier wird eine Wärmemenge übertragen, die sich zusammensetzt aus der Wärmemenge Q_S , welche von der Beschaufelung durch Leitung eingeführt wird und aus der Wärmemenge Q_B , welche am Grund der Schaufelkanäle durch Konvektion mit dem Wärmeübergangswert α_B vom Dampf oder Gas übertragen wird. Mit Σf_S als Summe

⁵ W. McLachlan: Bessel-Functions for Engineers. Oxford. 1934. Tabellen auch in Jahnke-Emde, Funktionentafeln. B. G. Teubner 1938.

aller Schaufelquerschnittsflächen und Σf_B als Summe aller Schaufelkanalgrundflächen wird

$$Q_S = \sum f_S \lambda_S \frac{d\vartheta_S}{dx} \quad \text{und} \quad Q_B = \sum f_B \alpha_B (t_D - \vartheta_m). \quad (40)$$

Darin beziehen sich die Fußnoten S auf die Schaufel; t_D ist die Dampf- oder Gas-temperatur. Diese Wärmemengen müssen von der Scheibe weitergeleitet werden. Es gilt also

$$Q_{r=r_a} = Q_S + Q_B, \quad (41)$$

worin $Q_{r=r_a}$ durch (38) gegeben ist. In dieser Beziehung fehlt ein Ausdruck für den Gradienten der Schaufeltemperatur am Übergang der Schaufel in das Rad. Zu seiner Ermittlung müssen wir uns über die Temperaturverteilung in einer Schaufel Aufschluß verschaffen und betrachten zu diesem Zweck ein Schaufelelement von der Länge dx . Mit den Bezeichnungen von Abb. 1 beträgt die in dieses Element durch Wärmeleitung eintretende Wärmemenge

$$Q_1 = \lambda_S (f + df) \frac{d}{dx} \left(\vartheta_S + \frac{\partial \vartheta_S}{\partial x} dx \right).$$

An seiner Oberfläche $u \cdot dx$ (u = Umfang) wird vom Dampf oder Gas die Wärmemenge

$$dQ_2 = \alpha_S \cdot u \cdot dx (t_D - \vartheta_S)$$

übertragen. Die von dem Schaufelelement weitergeleitete Wärmemenge beträgt

$$Q_3 = \lambda_S f \frac{d\vartheta_S}{dx}.$$

Im Gleichgewichtszustand ist $Q_1 + dQ_2 = Q_3$. Indem man die vorstehenden Ausdrücke in diese Bedingung einsetzt, erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta_S}{dx^2} + \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\vartheta_S}{dx} - \frac{\alpha_S u}{\lambda_S f} \vartheta = -\frac{\alpha_S u}{\lambda_S f} t_D. \quad (42)$$

Sie hat die Lösung

$$\vartheta_S = C_1 e^{\sqrt{\frac{\alpha_S u}{\lambda_S f}} \cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\alpha_S u}{\lambda_S f}} \cdot x} + t_D, \quad (43)$$

worin die Integrationskonstanten so beschaffen sein müssen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden: Am Ende $x = 1$ nimmt die Stirnfläche der Schaufel Wärme aus der Umgebung auf, es ist dort also $\frac{d\vartheta_S}{dx} = \frac{\alpha_S}{\lambda_S} (t_D - \vartheta_S)$. Wegen der kleinen Schaufelstirnfläche kann man hier aber auch einfach $\frac{d\vartheta_S}{dx} = 0$ setzen. An der Stelle $x = 0$ verlangt die Verträglichkeitsbedingung der Temperaturen von Schaufeln und Scheibenkranz einfach

$$\vartheta_m|_{r=r_a} = \vartheta_S|_{x=0}.$$

Kurz zusammengefaßt wird damit die Temperaturverteilung in einem vollständigen Turbinenläufer auf die folgende Weise gefunden: Der Temperaturverlauf in der Turbinenscheibe wird durch die Gl. (34) bis (37) ausgedrückt. Er ist mit vier Integrationskonstanten behaftet. Die Temperaturverteilung in den Schaufeln wird durch den Ausdruck (43) gegeben. Darin treten zwei weitere Freiwerte auf. Die Rand- bzw. Übergangsbedingungen für die Bestimmung der insgesamt sechs Integrationskonstanten lauten:

Am Innenrand der Scheibe $r = 0$ bzw. $r = r_0$ ist

$$\frac{d\vartheta_m}{dr} = 0$$

oder

$$\vartheta_m = \vartheta_{\text{Welle}} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{\vartheta}}{dr} = 0.$$

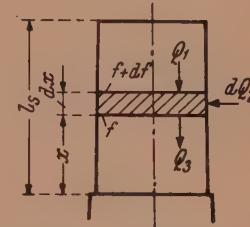


Abb. 1. Bezeichnungen an einer Turbinenschaufel.

Am Außenrand der Scheibe $r = r_a$ und gleichzeitig am Fußende der Schaufeln $x = 0$ ist

$$\vartheta_m = \vartheta_s \quad \text{und} \quad \bar{\vartheta} = 0$$

sowie

$$\lambda 2\pi r_a h_a \frac{d\vartheta_m}{dr} = \sum f_s \lambda_s \frac{d\vartheta_s}{dx} + \sum f_B \alpha_B (t_D - \vartheta_m).$$

Am Kopfende der Schaufeln $x = l_s$ ist

$$\frac{d\vartheta_s}{dx} = 0.$$

An der hier entwickelten Berechnung der Scheibentemperatur können unter bestimmten Voraussetzungen einige Vereinfachungen vorgenommen werden. So kann man beispielsweise sehr häufig die Wärmeübergangszahlen α_1 und α_2 an den beiden Scheibenseiten einander gleichsetzen. Dann gehen die beiden simultanen Differentialgleichungen (9) und (11) über in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Variablen ϑ_m und $\bar{\vartheta}$.

Die Lösungen gehen aus den vorhin abgeleiteten ohne weiteres hervor. Erachtet man die Scheibendicke als hinreichend dünn, um die Temperaturunterschiede in axialer Richtung vernachlässigen zu können, oder herrscht auf beiden Scheibenseiten dieselbe Temperatur, so verschwindet das mittlere Quergefälle $\bar{\vartheta}$ und damit die Differentialgleichung (11); man erhält die bekannten Lösungen für die Temperaturverteilung in einer ebenen dünnen Scheibe⁶ wieder als Sonderfall der obigen Lösungen.

Aus Festigkeitsgründen werden Turbinen- und Verdichterscheiben nur ausnahmsweise als Scheiben gleicher Dicke ausgeführt. Die Scheiben beliebigen Profils ist durch Reihenentwicklungen möglich; wegen der im allgemeinen sehr schlechten Konvergenz ist dieser Weg jedoch recht unbequem. Man könnte sich dann z. B. so behelfen, daß man die Scheibe durch Annähern der Profilkurve mittels einer Treppenlinie in eine Anzahl von Teilscheiben gleicher Dicke zerlegt und die Temperaturverläufe in jeder dieser Teilscheiben unter Beachtung der Übergangsbedingungen an den Sprungstellen berechnet.

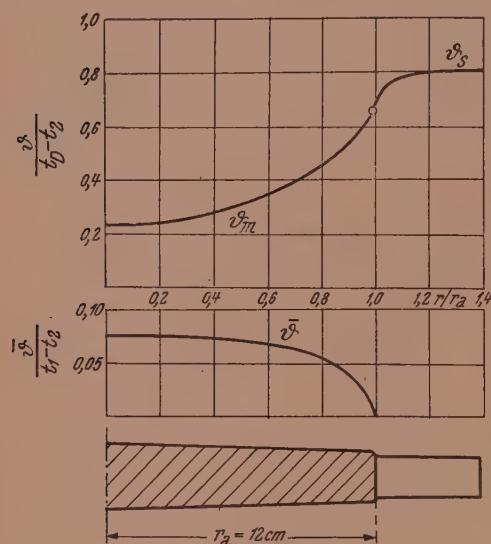
Abb. 2. Verlauf der mittleren Temperatur und des mittleren Quergefälles in einem Turbinenläufer.

Eine in der Praxis viel handlichere Lösung gewinnt man dadurch, daß man die Temperaturverteilung durch geeignete Ansätze mit offenen Freiwerten, welche aber jeweils eine der Randbedingungen bereits erfüllen, ausdrückt und die Freiwerte aus der Forderung bestimmt, daß die Differentialgleichungen (9) und (11) nur an bestimmten Stellen erfüllt werden. Nehmen wir z. B. an, daß am Innenradius r_0 kein Wärmefluß zur Welle stattfindet, so kann man für ϑ_m und $\bar{\vartheta}$ mit einem Ansatz von der Form

$$\vartheta = \vartheta_0 + (r - r_0)^2 [a_0 + a_1(r - r_0) + a_2(r - r_0)^2 + \dots]$$

in die Differentialgleichungen (9) und (11) eingehen und verlangen, daß diese Gleichungen an den bestimmten Stellen r_0, r_1, r_2, \dots befriedigt werden. Da an diesen Stellen

⁶ E. Beck: Temperaturverlauf in kreisrunden Scheiben. Forschung 10, 165 (1939).



die Koeffizienten von ϑ_m'' , ϑ_m' und ϑ_m bzw. von $\bar{\vartheta}''$, $\bar{\vartheta}'$ und $\bar{\vartheta}$ sowie die übrigen Veränderlichen ausgerechnet werden können, so erhält man dadurch ein System von linearen Gleichungen, aus dem die gesuchten Freiwerte a_0 , a_1 , a_2 usw. gewonnen werden können. Die Integrationskonstanten $\vartheta_{m=0}$ und $\bar{\vartheta}_0$ werden dann aus einer entsprechenden Bedingung am Außenrand der Scheibe ermittelt.

Aus zahlreichen Vergleichsrechnungen an Scheiben mit verschiedenen Profilen läßt sich übrigens folgern, daß der Temperaturverlauf bei Profilen mit schwacher Dickenänderung mit einer für die Praxis ausreichenden Treue wiedergegeben wird durch den Temperaturverlauf in einer Scheibe gleicher Dicke, wenn als Dicke ein passender mittlerer Wert gewählt wird.

Zum Schluß werde das Ergebnis einer Durchrechnung angeführt. Es handelt sich um das Laufrad einer nach dem Büchi-Verfahren arbeitenden Abgasturbine. Die Scheibe sitzt fliegend auf der Welle und wird an der Gasaustrittsseite mangels einer besonderen Abschirmung vom Abgas umspült, während auf der anderen Seite die Umgebungsluft, welcher zwecks Kühlhaltung des Lagergehäuses gute Zirkulationsmöglichkeiten gelassen wurden, freien Zutritt hat. Folgende Werte sind gegeben:

$$\begin{array}{lll} t_1 = 450^\circ \text{ C} & \alpha_1 = 150 \text{ WE/m}^2 \text{ h}^\circ \text{ C} & \lambda = 40 \text{ WE/m h}^\circ \text{ C} \\ t_2 = 100^\circ \text{ C} & \alpha_2 = 280 \text{ WE/m}^2 \text{ h}^\circ \text{ C} & \lambda_s = 18 \text{ WE/m h}^\circ \text{ C} \\ t_D = 650^\circ \text{ C} & \alpha_s = 600 \text{ WE/m}^2 \text{ h}^\circ \text{ C} & \end{array}$$

Die volle Scheibe ist schwach konisch ausgeführt, so daß sie gut als Scheibe gleicher Dicke angenähert werden kann. Die Rechnung ergibt den in Abb. 2 eingetragenen Verlauf der mittleren Temperaturen von Scheibe und Beschaufelung und des mittleren Quergefälles in der Scheibe entlang des Halbmessers.

(Eingegangen am 5. September 1946.)

Der wandartige Träger auf drei Stützen.

Von H. Parkus, Wien.

Mit 11 Textabbildungen.

I. Einleitung.

Der elementaren Balkenbiegungslehre wird die Bernoulli'sche Hypothese zugrunde gelegt, nach welcher die Querschnitte des Balkens bei der Biegung eben bleiben; diese Annahme ergibt dann unter der Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes eine lineare Verteilung der Biegespannungen über die Querschnittshöhe (Naviersches Geradliniengesetz). Ist die Querschnittshöhe des Trägers genügend klein gegenüber seiner Stützweite, so ist die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit hinreichend genau. Mit wachsender Trägerhöhe jedoch weicht die Spannungsverteilung immer mehr vom Geradliniengesetz ab und wenn die Trägerhöhe etwa gleich der Stützweite wird, kann von einer auch nur entfernten Übereinstimmung nicht mehr gesprochen werden.

Die nachfolgende Arbeit¹ setzt sich nun zum Ziel, diese Verhältnisse, vor allem also die Spannungsverteilung, für einen auf drei Stützen gelagerten Träger zu untersuchen, dessen Querschnitt ein hohes schmales Rechteck ist. Derlei wandartige Träger finden z. B. bei Silobauten ausgedehnte Verwendung.

¹ Dissertation Technische Hochschule Wien.

Der unendlich lange, wandartige Träger auf unendlich vielen Stützen wurde bereits von Dischinger,² Bay³ und Craemer⁴ behandelt. Es erscheint aber wünschenswert, den durch die Annahme unendlich vieler Felder vernachlässigten Randeinfluß mit in Rechnung zu stellen. Insbesondere ist auch die Abhängigkeit der Stützdrücke von der Trägerhöhe zu klären.

Die nachstehend gewonnenen Formeln und Zahlenergebnisse gelten unmittelbar auch für das Einzelfeld; man hat nur den von der Mittelstütze herrührenden Randbelastungsanteil gleich Null zu setzen.

II. Allgemeines und Bezeichnungen.

Der wandartige Träger Abb. 1a und 1b kann als Scheibe, d. h. als ebenes Flächentragwerk, welches nur durch Kräfte in seiner Ebene beansprucht ist, aufgefaßt werden.

Wir untersuchen zwei Belastungsfälle, nämlich erstens über die ganze Trägerlänge durchlaufende Gleichlast p t/cm (Abb. 1a) und zweitens Gleichlast p in einem

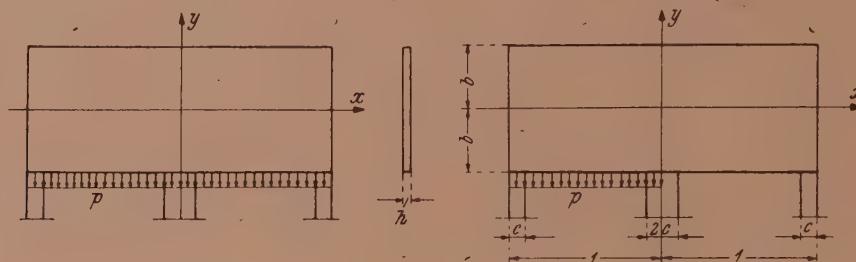


Abb. 1a.

Abb. 1b.

Feld, während das zweite unbelastet ist (Abb. 1b). Die Belastung denken wir uns am unteren Rand angreifend. Ein Lastangriff am oberen Rand oder eine Übertragung der Last längs der Wandfläche durch Reibung sowie Eigengewichtswirkung hätte, wie leicht einzusehen ist, bei durchlaufender Gleichlast nach Abb. 1a und bei verschwindender Querdehnungszahl keinen Einfluß auf die Biegespannung σ_x und die Schubspannung τ_{xy} . Lediglich die Spannungskomponente σ_y würde sich um einen konstanten oder von der Trägerhöhe linear abhängigen Anteil ändern.

Die Stützweite des Trägers wählen wir gleich der Einheit, die halbe Trägerhöhe bezeichnen wir mit b . Die Dicke der Rechteckscheibe sei h . Die Breite der Endstützen sei c , die der Mittelstütze $2c$.

Für einen Träger mit der Stützweite A , der halben Höhe $A \cdot b$, der Stützenbreite $A \cdot c$ und der Dicke h ergeben sich dann bei gleicher Randbelastung p die gleichen Spannungskomponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} . Die Querkräfte sind A -mal und die Momente A^2 -mal so groß. Ebenso sind die Verschiebungskomponenten u und v in x - bzw. y -Richtung mit A zu vervielfachen.

Die Lösung des vorliegenden ebenen Problems wird mittels der Airyschen Spannungsfunktion durchgeführt. Sie schließt sich unmittelbar an die von K. Girkmann⁵ gebrachte Lösung für das Einzelfeld mit symmetrischer Belastung an.

² F. Dischinger: Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens. Abh. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau 1, 69 (1932).

³ H. Bay: Der wandartige Träger auf unendlich vielen Stützen. Ing.-Arch. 3, 435 (1932).

⁴ H. Craemer: Spannungen in durchlaufenden Scheiben bei Vollbelastung sämtlicher Felder. Beton u. Eisen 32, 237 (1933).

⁵ K. Girkmann: Flächentragwerke. Wien: Springer-Verlag. 1946. S. 84.

Die bei den nachstehenden Reihenentwicklungen vorkommenden Summationszeiger legen wir wie folgt fest:

$$n, i, k = 1, 3, 5 \dots, m, r, s = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

Außerdem setzen wir noch zur Abkürzung

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{2b}, \quad \gamma_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \varepsilon_m = m\pi. \quad (2)$$

Wir stellen hier noch zwei Formeln zusammen, die später gebraucht werden. Wenn man nämlich eine gerade oder ungerade Funktion $f(x)$ so in eine Fourierreihe zu entwickeln hat, daß nur ungerade Vielfache von $\frac{2\pi x}{L}$ auftreten, wo L die Periodenlänge bedeutet, so gilt:

a) Gerade Funktion. Als Periodenlänge ist $L = 4a$ zu wählen, wenn $x = \pm a$ der Gültigkeitsbereich der Funktion ist. Die Funktion ist hierbei gemäß Abb. 2 über ihren Gültigkeitsbereich hinaus fortzusetzen. Man erhält dann

$$f(x) = \sum_n a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} = \sum_n a_n \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (3)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx.$$

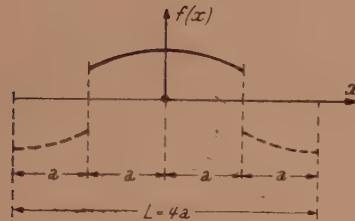


Abb. 2.

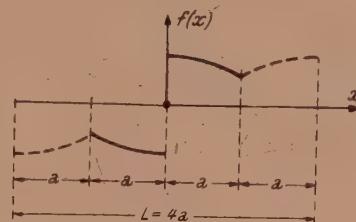


Abb. 3.

b) Ungerade Funktion. Es ist ebenfalls die Periodenlänge $L = 4a$ zu wählen und die Funktion gemäß Abb. 3 über den Gültigkeitsbereich hinaus fortzusetzen. Es ergibt sich

$$f(x) = \sum_n b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} = \sum_n b_n \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad (4)$$

mit

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{2a} dx.$$

Wir behandeln nun die beiden in Abb. 1a und 1b angegebenen Belastungsfälle, wobei wir uns die Belastung gemäß Abb. 1b durch Überlagerung einer in bezug auf die y -Achse symmetrischen (Abb. 1a) und einer antimetrischen Belastung (Abb. 6) hergestellt denken.

III. Symmetrische Belastung.

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Wir nehmen an, daß die Stützdrücke über die Stützbreite konstant sind und bezeichnen den Stützdruck der Endstützen mit p_0/h , den der Mittelstütze mit p_1/h . Dann gilt aus Gleichgewichtsgründen

$$(p_0 + p_1)c = p. \quad (5)$$

Wir fassen p_1 als statisch unbestimmte Größe auf und setzen

$$p_1 = \varrho p, \quad (6)$$

Der Faktor ϱ ist dann aus den Formänderungsbedingungen zu ermitteln. Wir wollen diese in der Form annehmen

$$v_{(x=0, y=-b)} = v_{(x=\pm 1, y=-b)} = 0. \quad (7)$$

wo v die Verschiebungskomponente in Richtung y bedeutet. Diese Bedingung gilt natürlich nur näherungsweise.

Um die Randbedingungen für die Spannungskomponenten erfüllen zu können, zerlegen wir die Randbelastung in einen bezüglich der x -Achse symmetrischen Teil (Teilbelastung „1“; Abb. 4) und einen antimetrischen Teil (Teilbelastung „2“, Abb. 5). Diese beiden Teilbelastungen behandeln wir zunächst getrennt und kennzeichnen die zugehörigen Formelgrößen durch entsprechende, in Klammer gesetzte obere Indizes.

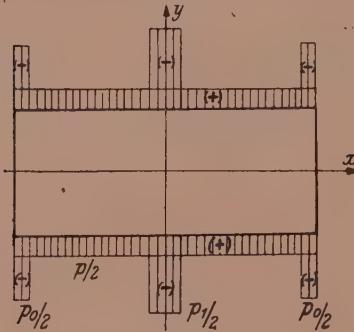


Abb. 4.

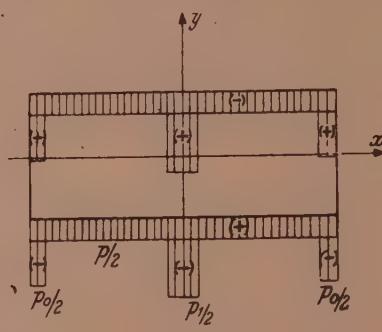


Abb. 5.

1. Teilbelastung „1“.

Da diese Belastung zweifach symmetrisch ist, haben wir auch die Airysche Spannungsfunktion $F^{(1)}$ in x und y symmetrisch anzusetzen. Es kommen also nur partikuläre Integrale der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ in Betracht, die gerade Funktionen von x und y sind. Wir wählen den Ansatz

$$\begin{aligned} F^{(1)} = \sum_n & \left[\frac{1}{\alpha_n^2} (A_n^{(1)} \cos \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(1)} \sin \alpha_n y) \cos \alpha_n x + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta_n^2} (C_n^{(1)} \cos \beta_n x + \beta_n x D_n^{(1)} \sin \beta_n x) \cos \beta_n y \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Hierbei haben wir nur ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2b}$ berücksichtigt. Dies ist, wie sich sofort zeigen wird, notwendig, um die Randbedingungen für die Normalspannungskomponenten gliedweise erfüllen zu können.

Für die Spannungskomponenten $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$ und $\tau_{xy}^{(1)}$ erhalten wir dann

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial y^2} = \sum_n \{ [(A_n^{(1)} + 2B_n^{(1)}) \cos \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(1)} \sin \alpha_n y] \cos \alpha_n x - \\ &\quad - [C_n^{(1)} \cos \beta_n x + \beta_n x D_n^{(1)} \sin \beta_n x] \cos \beta_n y \}, \\ \sigma_y^{(1)} &= \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} = \sum_n \{ -[A_n^{(1)} \cos \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(1)} \sin \alpha_n y] \cos \alpha_n x + \\ &\quad + [(C_n^{(1)} + 2D_n^{(1)}) \cos \beta_n x + \beta_n x D_n^{(1)} \sin \beta_n x] \cos \beta_n y \}, \\ \tau_{xy}^{(1)} &= -\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x \partial y} = \sum_n \{ [(A_n^{(1)} + B_n^{(1)}) \sin \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(1)} \cos \alpha_n y] \sin \alpha_n x + \\ &\quad + [(C_n^{(1)} + D_n^{(1)}) \sin \beta_n x + \beta_n x D_n^{(1)} \cos \beta_n x] \sin \beta_n y \}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wir haben nun auch die Randbelastung $p(x)$ so in eine Fourierreihe zu entwickeln, daß nur ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ auftreten. Da es sich hierbei um eine gerade Funktion handelt, ergibt Gl. (3) mit $a = 1$ die Entwicklung

$$p(x) = \sum_n a_n \cos \alpha_n x. \quad (10)$$

Für a_n erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \left(-\int_0^a \frac{p_1}{2} \cos \alpha_n x dx + \int_0^a \frac{p}{2} \cos \alpha_n x dx - \int_{a-c}^a \frac{p_0}{2} \cos \alpha_n x dx \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_n} [(-1)^{\frac{n+1}{2}} p_0 (1 - \cos \alpha_n c) - p_1 \sin \alpha_n c + (-1)^{\frac{n+3}{2}} p]. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (5) und (6) ergibt sich, wenn wir noch

$$a_n = \varrho \cdot \bar{a}_n + \bar{a}_n \quad (11)$$

setzen,

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_n &= \frac{p}{\alpha_n} [(-1)^{\frac{n+3}{2}} (1 - \cos \alpha_n c) - \sin \alpha_n c], \\ \bar{a}_n &= (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{p}{\alpha_n} \left[\frac{1}{c} (1 - \cos \alpha_n c) - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Mit $\varrho = 0$ gelten diese und alle weiteren Formeln unmittelbar für das durch eine Gleichlast belastete Einzelfeld.

Wir passen nun unseren Ansatz (8) an die Randbedingungen an. Wegen der doppelten Symmetrie genügt es dabei, die Randbedingungen nur längs der Ränder $x = +1$ und $y = +b$ zu erfüllen. Es muß dann sein

$$\text{in } x = 1 \dots \sigma_x^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0,$$

$$\text{in } y = b \dots \sigma_y^{(1)} = \frac{p(x)}{h}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0.$$

Die Bedingungen für die Normalspannungen liefern wegen $\cos \alpha_n = \cos \beta_n b = \cos \frac{n\pi}{2} = 0$

$$C_n^{(1)} = -\beta_n D_n^{(1)} \operatorname{Tg} \beta_n \quad (13)$$

$$A_n^{(1)} = -\frac{a_n}{h \operatorname{Cof} \alpha_n b} - \alpha_n b B_n^{(1)} \operatorname{Tg} \alpha_n b. \quad (14)$$

Die gliedweise Erfüllung der Randbedingungen für die Normalspannungen war hier nur dadurch möglich, daß die Spannungsfunktion $F^{(1)}$ nur Glieder enthält, die nach ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2b}$ fortschreiten.

Die Randbedingungen für die Schubspannungen verlangen

$$\begin{aligned} \sum_n \{ &[(A_n^{(1)} + B_n^{(1)}) \operatorname{Sint} \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(1)} \operatorname{Cof} \alpha_n y] \sin \frac{n\pi}{2} + \\ &+ [(C_n^{(1)} + D_n^{(1)}) \operatorname{Sint} \beta_n x + \beta_n x D_n^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_n x] \sin \beta_n y \} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_n \{ &[(A_n^{(1)} + B_n^{(1)}) \operatorname{Sint} \alpha_n b + \alpha_n b B_n^{(1)} \operatorname{Cof} \alpha_n b] \sin \alpha_n x + \\ &+ [(C_n^{(1)} + D_n^{(1)}) \operatorname{Sint} \beta_n x + \beta_n x D_n^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_n x] \sin \frac{n\pi}{2} \} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Um diese Beziehungen in x bzw. y identisch erfüllen zu können, entwickeln wir die Hyperbelfunktionen in Fourierreihen, wobei wir zu beachten haben, daß n nur ungeradzahlige Werte durchlaufen darf. Wir setzen also

$$\sin \alpha_n y = \sum_i E_{i,n}^{(1)} \sin \beta_i y, \quad y \operatorname{Cof} \alpha_n y = \sum_i F_{i,n}^{(1)} \sin \beta_i y,$$

$$\sin \beta_n x = \sum_i G_{i,n}^{(1)} \sin \alpha_i x, \quad x \operatorname{Cof} \beta_n x = \sum_i H_{i,n}^{(1)} \sin \alpha_i x$$

und erhalten nach Gl. (4)

$$E_{i,n}^{(1)} = \frac{2}{b} \int_0^b \sin \alpha_n y \sin \beta_i y dy = \frac{2 \alpha_n}{b} \frac{\operatorname{Cof} \alpha_n b \sin \frac{i\pi}{2}}{\alpha_n^2 + \beta_i^2},$$

$$F_{i,n}^{(1)} = \frac{2}{b} \int_0^b y \operatorname{Cof} \alpha_n y \sin \beta_i y dy = \frac{2}{b} \frac{\sin \frac{i\pi}{2}}{\alpha_n^2 + \beta_i^2} (\alpha_n b \sin \alpha_n b - \frac{\alpha_n^2 - \beta_i^2}{\alpha_n^2 + \beta_i^2} \operatorname{Cof} \alpha_n b),$$

$$G_{i,n}^{(1)} = 2 \int_0^1 \sin \beta_n x \sin \alpha_i x dx = 2 \beta_n \frac{\operatorname{Cof} \beta_n \sin \frac{i\pi}{2}}{\alpha_i^2 + \beta_n^2},$$

$$H_{i,n}^{(1)} = 2 \int_0^1 x \operatorname{Cof} \beta_n x \sin \alpha_i x dx = \frac{2 \sin \frac{i\pi}{2}}{\alpha_i^2 + \beta_n^2} (\beta_n \sin \beta_n + \frac{\alpha_i^2 - \beta_n^2}{\alpha_i^2 + \beta_n^2} \operatorname{Cof} \beta_n).$$

Tragen wir dies in die Gl. (15) und (16) ein, so ergibt sich je eine Reihe in $\sin \beta_n y$ bzw. $\sin \alpha_n x$. Die Koeffizienten dieser Reihen, die selbst wieder unendliche Summen sind, müssen verschwinden. Drücken wir noch $A_n^{(1)}$ und $C_n^{(1)}$ aus den Gl. (14) und (13) durch $B_n^{(1)}$ und $D_n^{(1)}$ aus, so erhalten wir nach einigen Umformungen aus Gl. (16)

$$B_n^{(1)} = \frac{1}{\operatorname{Cof} \alpha_n b} \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_n b + 1}{\sin 2 \alpha_n b + 2 \alpha_n b} \left[\frac{\alpha_n}{b} \operatorname{Tg} \alpha_n b + 4 \alpha_n^2 \sum_i (-1)^{\frac{i+n}{2}} \frac{\beta_i}{(\alpha_n^2 + \beta_i^2)^2} (D_i^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_i) \right] \quad (17)$$

und aus Gl. (15), wenn wir für $B_n^{(1)}$ den Ausdruck Gl. (17) einführen:

$$(D_n^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_n) \left(\operatorname{Tg} \beta_n + \frac{\beta_n}{\operatorname{Cof}^2 \beta_n} \right) + \\ + \frac{16}{b} \beta_n^2 \sum_i \sum_k (-1)^{\frac{n+k}{2}} \frac{\alpha_i^3 \beta_k}{(\alpha_i^2 + \beta_n^2)^2 (\alpha_i^2 + \beta_k^2)^2} \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_i b + 1}{\sin 2 \alpha_i b + 2 \alpha_i b} (D_k^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_k) = \\ = \frac{2}{b} \sum_i (-1)^{\frac{n+i}{2} + 1} \frac{\alpha_i}{h} \frac{\alpha_i}{(\alpha_i^2 + \beta_n^2)^2} \left[\alpha_i^2 - \beta_n^2 \left(2 \frac{\sin 2 \alpha_i b}{\sin 2 \alpha_i b + 2 \alpha_i b} - 1 \right) \right].$$

Wir schreiben dieses in den Unbekannten $D_k^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_k$ lineare, inhomogene Gleichungssystem in einer für die Zahlenrechnung bequemeren Form:

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k}^{(1)} (D_k^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_k) &= c_n^{(1)}, \\ a_{n,k}^{(1)} &= \frac{16}{b} (-1)^{\frac{n+k}{2}} \beta_n^2 \beta_k \sum_i \frac{\alpha_i^3}{(\alpha_i^2 + \beta_n^2)^2 (\alpha_i^2 + \beta_k^2)^2} \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_i b + 1}{\sin 2 \alpha_i b + 2 \alpha_i b}, \\ n \neq k, \quad a_{k,n}^{(1)} &= a_{n,k}^{(1)} \frac{k}{n}, \\ a_{n,n}^{(1)} &= \operatorname{Tg} \beta_n + \frac{\beta_n}{\operatorname{Cof}^2 \beta_n} - \frac{16}{b} \beta_n^3 \sum_i \frac{\alpha_i^3}{(\alpha_i^2 + \beta_n^2)^4} \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_i b + 1}{\sin 2 \alpha_i b + 2 \alpha_i b}, \\ c_n^{(1)} &= \frac{2}{b} \sum_i (-1)^{\frac{n+1}{2} + 1} \frac{\alpha_i}{h} \frac{\alpha_i}{(\alpha_i^2 + \beta_n^2)^2} \left[\alpha_i^2 - \beta_n^2 \left(2 \frac{\sin 2 \alpha_i b}{\sin 2 \alpha_i b + 2 \alpha_i b} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Es ist jetzt noch die Verschiebungskomponente $v^{(1)}$ in Richtung y zu berechnen. Aus

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

folgt durch Integration unter Berücksichtigung des Hookeschen Gesetzes

$$u^{(1)} = \frac{1}{E} \int \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial y^2} dx - \frac{\mu}{E} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} + \Phi(y), \quad v^{(1)} = \frac{1}{E} \int \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} dy - \frac{\mu}{E} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y} + \Psi(x),$$

wo μ die Querdehnungszahl bedeutet. Zwischen Φ und Ψ besteht wegen

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

der Zusammenhang

$$\int \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dx} = 0.$$

Für die hier vorliegende Spannungsfunktion verschwinden die von $F^{(1)}$ herrührenden Glieder und es bleibt die Differentialgleichung

$$\frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dx} = 0$$

mit den Lösungen

$$\Phi = K_0^{(1)} + K_1^{(1)} y, \quad \Psi = K_2^{(1)} - K_1^{(1)} x.$$

Wegen der in x symmetrischen Belastung muß

$$v^{(1)}(+x) = v^{(1)}(-x)$$

sein. Damit wird

$$K_1^{(1)} = 0$$

und wir erhalten für die von der Teilbelastung „1“ herrührende Verschiebungskomponente $v^{(1)}$

$$E v^{(1)} = \sum_n \left\{ -\frac{1}{\alpha_n} [(A_n^{(1)} \sin \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(1)} \cos \alpha_n y) (1 + \mu) - (1 - \mu) B_n^{(1)} \sin \alpha_n y] \cos \alpha_n x + \frac{1}{\beta_n} [(C_n^{(1)} \cos \beta_n x + \beta_n x D_n^{(1)} \sin \beta_n x) (1 + \mu) + 2 D_n^{(1)} \cos \beta_n x] \sin \beta_n y \right\} + E K_2^{(1)}. \quad (19)$$

2. Teilbelastung „2“.

Diese Belastung ist in x symmetrisch und in y antimetrisch. Die Airysche Spannungsfunktion muß die gleichen Eigenschaften aufweisen. Wir setzen daher

$$F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2} (A_n^{(2)} \sin \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(2)} \cos \alpha_n y) \cos \alpha_n x + \sum_m \frac{1}{\gamma_m^2} (C_m^{(2)} \cos \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(2)} \sin \gamma_m x) \sin \gamma_m y, \quad (20)$$

wobei, um die Randbedingungen in den Normalspannungskomponenten wieder gliedweise erfüllen zu können, jetzt die Periode der Fourierreihe in y mit $L = 2b$ gewählt wurde. $\sin \gamma_m y$ verschwindet dann am Rand $y = \pm b$. Die Spannungskomponenten lauten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= \sum_n [(A_n^{(2)} + 2 B_n^{(2)}) \sin \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(2)} \cos \alpha_n y] \cos \alpha_n x - \\ &\quad + \sum_m (C_m^{(2)} \cos \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(2)} \sin \gamma_m x) \sin \gamma_m y, \\ \sigma_y^{(2)} &= - \sum_n (A_n^{(2)} \sin \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(2)} \cos \alpha_n y) \cos \alpha_n x + \\ &\quad - \sum_m [C_m^{(2)} + 2 D_m^{(2)}] \cos \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(2)} \sin \gamma_m x] \sin \gamma_m y, \\ \tau_{xy}^{(2)} &= \sum_n [(A_n^{(2)} + B_n^{(2)}) \cos \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(2)} \sin \alpha_n y] \sin \alpha_n x - \\ &\quad - \sum_m [(C_m^{(2)} + D_m^{(2)}) \sin \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(2)} \cos \gamma_m x] \cos \gamma_m y. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Es genügt auch hier wieder, die Randbedingungen nur längs der Ränder $x = +1$ und $y = +b$ zu erfüllen. Sie lauten dort

$$\text{in } x = 1 \dots \sigma_x^{(2)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(2)} = 0,$$

$$\text{in } y = b \dots \sigma_y^{(2)} = -\frac{p(x)}{h}, \quad \tau_{xy}^{(2)} = 0.$$

Aus den Bedingungen für die Normalspannungen folgt sofort

$$C_m^{(2)} = -\gamma_m D_m^{(2)} \operatorname{Tg} \gamma_m. \quad (22)$$

$$A_n^{(2)} = \frac{a_n}{h \operatorname{Sin} \alpha_n b} - \alpha_n b B_n^{(2)} \operatorname{Ctg} \alpha_n b. \quad (23)$$

Die Randbedingungen für die Schubspannungen fordern

$$\begin{aligned} & \sum_n [(A_n^{(2)} + B_n^{(2)}) \operatorname{Cos} \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(2)} \operatorname{Sin} \alpha_n y] \sin \frac{n\pi}{2} - \\ & - \sum_m [(C_m^{(2)} + D_m^{(2)}) \operatorname{Sin} \gamma_m + \gamma_m D_m^{(2)} \operatorname{Cos} \gamma_m] \cos \gamma_m y = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n [(A_n^{(2)} + B_n^{(2)}) \operatorname{Cos} \alpha_n b + \alpha_n b B_n^{(2)} \operatorname{Sin} \alpha_n b] \sin \alpha_n x - \\ & - \sum_m [(C_m^{(2)} + D_m^{(2)}) \operatorname{Sin} \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(2)} \operatorname{Cos} \gamma_m x] \cos m \pi = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Wir haben auch hier wieder die hyperbolischen Funktionen durch Fourierreihen darzustellen, wobei in der Entwicklung nach y alle ganzzahligen Vielfachen (Periode $L = 2b$), in der Entwicklung nach x aber nur die ungeradzahligen Vielfachen der Grundwelle zu durchlaufen sind (Periode $L = 4$). Im einzelnen ist also zu setzen

$$\operatorname{Cos} \alpha_n y = \frac{E_{0n}^{(2)}}{2} + \sum_m E_{mn}^{(2)} \cos \gamma_m y, \quad y \operatorname{Sin} \alpha_n y = \frac{F_{0n}^{(2)}}{2} + \sum_m F_{mn}^{(2)} \cos \gamma_m y,$$

$$\operatorname{Sin} \gamma_m x = \sum_n G_{nm}^{(2)} \sin \alpha_n x, \quad x \operatorname{Cos} \gamma_m x = \sum_n H_{nm}^{(2)} \sin \alpha_n x,$$

mit

$$E_{mn}^{(2)} = \frac{2}{b} \int_0^b \operatorname{Cos} \alpha_n y \cos \gamma_m y dy = \frac{2 \alpha_n}{b} \frac{\operatorname{Sin} \alpha_n b \cos m \pi}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2}, \quad \frac{E_{0n}^{(2)}}{2} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha_n b}{\alpha_n b},$$

$$\begin{aligned} F_{mn}^{(2)} &= \frac{2}{b} \int_0^b y \operatorname{Sin} \alpha_n y \cos \gamma_m y dy = \frac{2}{b} \frac{\cos m \pi}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2} (\alpha_n b \operatorname{Cos} \alpha_n b - \frac{\alpha_n^2 - \gamma_m^2}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2} \operatorname{Sin} \alpha_n b), \\ & \frac{F_{0n}^{(2)}}{2} = \frac{1}{\alpha_n^2 b} (\alpha_n b \operatorname{Cos} \alpha_n b - \operatorname{Sin} \alpha_n b), \end{aligned}$$

$$G_{nm}^{(2)} = 2 \int_0^1 \operatorname{Sin} \gamma_m x \sin \alpha_n x dx = 2 \gamma_m \frac{\operatorname{Cos} \gamma_m \sin \frac{n\pi}{2}}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2},$$

$$H_{nm}^{(2)} = 2 \int_0^1 x \operatorname{Cos} \gamma_m x \sin \alpha_n x dx = \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2} \left(\gamma_m \operatorname{Sin} \gamma_m + \frac{\alpha_n^2 - \gamma_m^2}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2} \operatorname{Cos} \gamma_m \right).$$

Diese Werte in die Gl. (24) und (25) eingetragen, ergeben sich zwei Reihen in $\cos \gamma_m y$ und $\sin \alpha_n x$, wobei allerdings in der ersten Reihe auch noch ein Absolutglied von der Größe

$$\sum_n \frac{a_n}{h \alpha_n b} \sin \frac{n\pi}{2}$$

vorkommt. Dieses Glied verschwindet aber wegen

$$\frac{1}{h b} \sum_n \frac{a_n}{\alpha_n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{h b} \int_0^1 \sum_n a_n \cos \alpha_n x dx = \frac{1}{2 h b} \int_{-1}^{+1} p(x) dx = 0,$$

da die Randbelastung ein Gleichgewichtssystem bildet. Wir können somit die Rand-

bedingungen (24) und (25) erfüllen, indem wir die Koeffizienten der daraus gebildeten Reihen Null setzen. Berücksichtigen wir noch Gl. (22) und (23), so erhalten wir aus Gl. (25)

$$B_n^{(2)} = -\frac{1}{\sin \alpha_n b} \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_n b - 1}{\sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b} \left[\frac{a_n}{h} \operatorname{Ctg} \alpha_n b + 4 \alpha_n^2 \sum_m (-1)^{\frac{n+1}{2} + m} \frac{\gamma_m}{(\alpha_n^2 + \gamma_m^2)^2} (D_m^{(2)} \operatorname{Cof} \gamma_m) \right]. \quad (26)$$

Gl. (24) liefert nach Einsetzen des Ausdrückes Gl. (26)

$$\left. \begin{aligned} \sum_s a_{ms}^{(2)} (D_s^{(2)} \operatorname{Cof} \gamma_s) &= c_m^{(2)}, \\ a_{ms}^{(2)} &= \frac{16}{b} (-1)^{m+s+1} \gamma_m^2 \gamma_s \sum_i \frac{\alpha_i^3}{(\alpha_i^2 + \gamma_m^2)^2 (\alpha_i^2 + \gamma_s^2)^2} \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_i b - 1}{\sin 2 \alpha_i b - 2 \alpha_i b}, \\ m \neq s, a_{sm}^{(2)} &= a_{ms}^{(2)} \frac{s}{m}, \\ a_{mm}^{(2)} &= \operatorname{Tg} \gamma_m + \frac{\gamma_m}{\operatorname{Cof}^2 \gamma_m} - \frac{16}{b} \gamma_m^3 \sum_i \frac{\alpha_i^3}{(\alpha_i^2 + \gamma_m^2)^4} \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_i b - 1}{\sin 2 \alpha_i b - 2 \alpha_i b}, \\ c_m^{(2)} &= \frac{2}{b} \sum_i (-1)^{\frac{i+3}{2} + m} \frac{\alpha_i}{h} \frac{\alpha_i}{(\alpha_i^2 + \gamma_m^2)^2} \left[\alpha_i^2 - \gamma_m^2 \left(2 \frac{\sin 2 \alpha_i b}{\sin 2 \alpha_i b - 2 \alpha_i b} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Für die Verschiebungskomponente $v^{(2)}$ gelten die gleichen Überlegungen wie bei der Teilbelastung „1“. Man erhält

$$\begin{aligned} E v^{(2)} &= -\sum_n \frac{1}{\alpha_n} [(A_n^{(2)} \operatorname{Cof} \alpha_n y + \alpha_n y B_n^{(2)} \sin \alpha_n y) (1 + \mu) - \\ &\quad - (1 - \mu) B_n^{(2)} \operatorname{Cof} \alpha_n y] \cos \alpha_n x - \\ &\quad - \sum_m \frac{1}{\gamma_m} [(C_m^{(2)} \operatorname{Cof} \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(2)} \sin \gamma_m x) (1 + \mu) + \\ &\quad + 2 D_m^{(2)} \operatorname{Cof} \gamma_m x] \cos \gamma_m y + E K_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

3. Bestimmungsgleichung für die statisch unbestimmte Größe ϱ .

Die Verschiebungskomponente v unter der symmetrischen Belastung ist

$$v = v^{(1)} + v^{(2)}.$$

Die Erfüllung der zweiten Bedingung (7) ergibt, wenn für $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ die Ausdrücke Gl. (19) und (28) herangezogen werden,

$$\begin{aligned} E(K_2^{(1)} + K_2^{(2)}) &= \sum_n \frac{1}{\beta_n} \{[(1 + \mu) C_n^{(1)} + 2 D_n^{(1)}] \operatorname{Cof} \beta_n + \\ &\quad + (1 + \mu) \beta_n D_n^{(1)} \sin \beta_n\} \sin \frac{n\pi}{n} + \\ &\quad + \sum_m \frac{1}{\gamma_m} \{[(1 + \mu) C_m^{(2)} + 2 D_m^{(2)}] \operatorname{Cof} \gamma_m + \\ &\quad + (1 + \mu) \gamma_m D_m^{(2)} \sin \gamma_m\} \cos m\pi. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus der ersten Bedingung (7)

$$\begin{aligned} \sum_u \frac{1}{\alpha_n} [A_n^{(1)} \sin \alpha_n b - A_n^{(2)} \operatorname{Cof} \alpha_n b - B_n^{(1)} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \sin \alpha_n b - \alpha_n b \operatorname{Cof} \alpha_n b \right) + \\ &\quad + B_n^{(2)} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{Cof} \alpha_n b - \alpha_n b \sin \alpha_n b \right)] + \\ &\quad + \sum_n \frac{1}{\beta_n} (-1)^{\frac{n+3}{2}} [C_n^{(1)} (\operatorname{Cof} \beta_n - 1) + D_n^{(1)} \left(\frac{2}{1+\mu} (\operatorname{Cof} \beta_n - 1) + \beta_n \sin \beta_n \right)] + \\ &\quad + \sum_m \frac{1}{\gamma_m} (-1)^m [C_m^{(2)} (\operatorname{Cof} \gamma_m - 1) + D_m^{(2)} \left(\frac{2}{1+\mu} (\operatorname{Cof} \gamma_m - 1) + \gamma_m \sin \gamma_m \right)] = 0. \end{aligned}$$

Aus den Gl. (13), (14), (17) sowie (22), (23) und (26) die Werte für die Koeffizienten eingesetzt, ergibt sich nach einigen Umformungen als Bestimmungsgleichung für die Konstante ϱ

$$\begin{aligned} & 2 \sum_n \left[\frac{a_n}{h} \frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_n b - 1}{\sin 2 \alpha_n b + 2 \alpha_n b} + \frac{\operatorname{Cof} 2 \alpha_n b + 1}{\sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b} + \right. \right. \\ & + 2 \alpha_n \frac{(1-\mu) \sin 2 \alpha_n b - (1+\mu) 2 \alpha_n b}{\sin 2 \alpha_n b + 2 \alpha_n b} \sum_i (-1)^{\frac{i+n}{2}} \frac{\beta_i}{(\alpha_n^2 + \beta_i^2)^2} (D_i^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_i) + \\ & + 2 \alpha_n \frac{(1-\mu) \sin 2 \alpha_n b + (1+\mu) 2 \alpha_n b}{\sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b} \sum_m (-1)^{m+\frac{n+1}{2}} \frac{\gamma_m}{(\alpha_n^2 + \gamma_m^2)^2} (D_m^{(2)} \operatorname{Cof} \gamma_m) \Big] = \\ & - \sum_n (-1)^{\frac{n+3}{2}} \left[(1+\mu) \frac{\operatorname{Tg} \beta_n}{\operatorname{Cof} \beta_n} + \frac{2}{\beta_n} \frac{\operatorname{Cof} \beta_n - 1}{\operatorname{Cof} \beta_n} \right] (D_n^{(1)} \operatorname{Cof} \beta_n) - \\ & - \sum_m (-1)^m \left[(1+\mu) \frac{\operatorname{Tg} \gamma_m}{\operatorname{Cof} \gamma_m} + \frac{2}{\gamma_m} \frac{\operatorname{Cof} \gamma_m - 1}{\operatorname{Cof} \gamma_m} \right] (D_m^{(2)} \operatorname{Cof} \gamma_m) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Dabei ist gemäß Gl. (11)

$$a_n = \varrho \cdot \bar{a}_n + \bar{\bar{a}}_n$$

und

$$D_n^{(1)} = \varrho \cdot \bar{D}_n^{(1)} + \bar{\bar{D}}_n^{(1)}, \quad D_m^{(2)} = \varrho \cdot \bar{D}_m^{(2)} + \bar{\bar{D}}_m^{(2)}. \quad (30)$$

$\bar{D}_n^{(1)}$ und $\bar{\bar{D}}_n^{(1)}$ bzw. $\bar{D}_m^{(2)}$ und $\bar{\bar{D}}_m^{(2)}$ sind aus den Gleichungssystemen (18) und (27) zu berechnen, indem dort in den Absolutgliedern a_n durch \bar{a}_n bzw. $\bar{\bar{a}}_n$ ersetzt wird.

Bei der Auswertung der Gl. (29) ist es interessant, die sich ergebende Konstante ϱ mit dem Wert zu vergleichen, den die elementare Theorie der Balkenbiegung liefert. Berechnet man die statisch unbestimmte Mittelstützkraft B eines Balkens auf drei Stützen nach dem Satz von Mena brea, so gilt

$$\frac{\partial_i A}{\partial B} = 0, \quad A_i = \frac{1}{EJ} \int_0^1 M_x^2 dx + \frac{\kappa}{GF} \int_0^1 Q_x^2 dx.$$

Dies ergibt, wenn das Trägheitsmoment $J = \frac{2}{3} h b^3$, die Querschnittsfläche $F = 2 b h$ und $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ sowie $\kappa = \frac{6}{5}$ gesetzt wird, mit $B = 2 \varrho p c$

$$\varrho = \frac{1}{2c} \frac{25 + 48 b^2 (1+\mu)}{20 + 48 b^2 (1+\mu)}. \quad (31)$$

IV. Antimetrische Belastung.

Bei dieser Belastung muß wegen der vorhandenen Antimetrie die Mittelstützkraft verschwinden (Abb. 6). Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte fordert

$$p_2 = \frac{p}{c(2-c)}. \quad (32)$$

Auch hier zerlegen wir wieder die Randbelastung in zwei Teile: in einen antimetrisch-symmetrischen Teil (Abb. 7, Teilbelastung „3“) und in einen zweifach antimetrischen Teil (Abb. 8, Teilbelastung „4“). Die beiden Teilbelastungen werden getrennt behandelt.

1. Teilbelastung „3“.

Entsprechend dieser Belastung muß die Airysche Spannungsfunktion eine ungerade Funktion in x und eine gerade Funktion in y sein:

$$\begin{aligned} F^{(2)} = & \sum_m \frac{1}{\varepsilon_m^2} (A_m^{(3)} \operatorname{Cof} \varepsilon_m y + \varepsilon_m y B_m^{(3)} \sin \varepsilon_m y) \sin \varepsilon_m x + \\ & + \sum_n \frac{1}{\beta_n^2} (C_n^{(2)} \sin \beta_n x + \beta_n x D_n^{(3)} \operatorname{Cof} \beta_n x) \cos \beta_n y. \end{aligned} \quad (33)$$

Die Periode in x -Richtung beträgt jetzt $L = 2$ und in y -Richtung $L = 4b$.

Weiter ist die antimetrische Randbelastung in eine Fourierreihe zu entwickeln:

$$p(x) = \sum_m b_m \sin \varepsilon_m x, \quad (34)$$

wobei

$$b_m = 2 \int_0^1 p(x) \sin \varepsilon_m x dx = 2 \left[-\int_0^1 \frac{p}{2} \sin \varepsilon_m x dx + \int_{1-c}^1 \frac{p_2}{2} \sin \varepsilon_m x dx \right].$$

Unter Beachtung von Gl. (32) erhält man

$$b_m = -\frac{p}{\varepsilon_m} \left[1 - (-1)^m + (-1)^m \frac{1 - \cos \varepsilon_m c}{\varepsilon_m (2 - c)} \right], \quad (35)$$

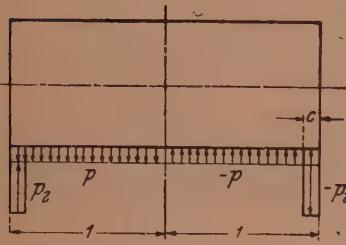


Abb. 6.

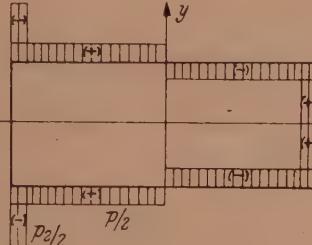


Abb. 7.

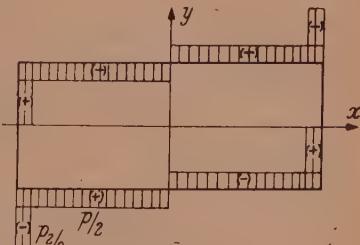


Abb. 8.

Für diese Teilbelastung sind die folgenden Randbedingungen zu erfüllen:

$$\text{in } x = 1 \dots \sigma_x^{(3)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(3)} = 0,$$

$$\text{in } y = b \dots \sigma_y^{(3)} = \frac{p(x)}{h}, \quad \tau_{xy}^{(3)} = 0.$$

Die Bedingungen für $\sigma_x^{(3)}$ und $\sigma_y^{(3)}$ geben

$$C_n^{(3)} = -\beta_n D_n^{(3)} \operatorname{Ctg} \beta_n, \quad (36)$$

$$A_m^{(3)} = -\frac{b_m}{h \operatorname{Cof} \varepsilon_m b} - \varepsilon_m b B_m^{(3)} \operatorname{Tg} \varepsilon_m b \quad (37)$$

und die Bedingungen für die Schubspannungen verlangen

$$\begin{aligned} -\sum_m [(A_m^{(3)} + B_m^{(3)}) \operatorname{Sin} \varepsilon_m y + \varepsilon_m y B_m^{(3)} \operatorname{Cof} \varepsilon_m y] \cos m \pi + \\ + \sum_n [(C_n^{(3)} + D_n^{(3)}) \operatorname{Cof} \beta_n + \beta_n D_n^{(3)} \operatorname{Sin} \beta_n] \sin \beta_n y = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} -\sum_m [(A_m^{(3)} + B_m^{(3)}) \operatorname{Sin} \varepsilon_m b + \varepsilon_m b B_m^{(3)} \operatorname{Cof} \varepsilon_m b] \cos \varepsilon_m x + \\ + \sum_n [(C_n^{(3)} + D_n^{(3)}) \operatorname{Cof} \beta_n x + \beta_n x D_n^{(3)} \operatorname{Sin} \beta_n x] \sin \frac{n \pi}{2} = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Die nach Entwicklung der Hyperbelfunktionen in Fourierreihen aus (38) und (39) entstehenden Reihen in $\sin \beta_n y$ und $\cos \varepsilon_m x$ können durch Nullsetzen der Koeffizienten zum Verschwinden gebracht werden, da die Absolutglieder sich wegheben. Wir erhalten mit Gl. (36) und (37) aus Gl. (39)

$$\begin{aligned} B_m^{(3)} = \frac{1}{\operatorname{Cof} \varepsilon_m b} \frac{\operatorname{Cof} 2 \varepsilon_m b + 1}{\operatorname{Sin} 2 \varepsilon_m b + 2 \varepsilon_m b} \times \\ \times \left[\frac{b_m}{h} \operatorname{Tg} \varepsilon_m b + 4 \varepsilon_m^2 \sum_n (-1)^{\frac{n+3}{2} + m} \frac{\beta_n}{(\varepsilon_m^2 + \beta_n^2)^2} (D_n^{(3)} \operatorname{Sin} \beta_n) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

und damit aus Gl. (38)

$$\begin{aligned}
 \sum_k a_{n,k}^{(3)} (D_k^{(3)} \sin \beta_k) &= c_n^{(3)}, \\
 a_{n,k}^{(3)} &= \frac{16}{b} (-1)^{\frac{n+k}{2}} \beta_n^2 \beta_k \sum_m \frac{\varepsilon_m^3}{(\varepsilon_m^2 + \beta_n^2)^2 (\varepsilon_m^2 + \beta_k^2)^2} \frac{\cos 2 \varepsilon_m b + 1}{\sin 2 \varepsilon_m b + 2 \varepsilon_m b}, \\
 n \neq k, \quad a_{k,n}^{(3)} &= a_{n,k}^{(3)} \frac{k}{n}, \\
 a_{n,n}^{(3)} &= \operatorname{Ctg} \beta_n - \frac{\beta_n}{\sin^2 \beta_n} - \frac{16}{b} \beta_n^{(3)} \sum_m \frac{\varepsilon_m^3}{(\varepsilon_m^2 + \beta_n^2)^4} \frac{\cos 2 \varepsilon_m b + 1}{\sin 2 \varepsilon_m b + 2 \varepsilon_m b}, \\
 c_k^{(3)} &= \frac{2}{b} \sum_m (-1)^{\frac{n+1}{2} + m} \frac{b_m}{h} \frac{\varepsilon_m}{(\varepsilon_m^2 + \beta_n^2)^2} \left[\varepsilon_m^2 - \beta_n^2 \left(2 \frac{\sin 2 \varepsilon_m b}{\sin 2 \varepsilon_m b + 2 \varepsilon_m b} - 1 \right) \right]. \quad (41)
 \end{aligned}$$

2. Teilbelastung „4“.

Die Spannungsfunktion ist hier sowohl in x wie in y ungerade:

$$\begin{aligned}
 F^{(4)} = \sum_m \frac{1}{\varepsilon_m^2} (A_m^{(4)} \sin \varepsilon_m y + \varepsilon_m y B_m^{(4)} \operatorname{Ctg} \varepsilon_m y) \sin \varepsilon_m x + \\
 + \frac{1}{\gamma_m^2} (C_m^{(4)} \sin \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(4)} \operatorname{Ctg} \gamma_m x) \sin \gamma_m y. \quad (42)
 \end{aligned}$$

Die Periode in x -Richtung ist $L = 2$, die Periode in y -Richtung $L = 2b$.

Wir haben jetzt den nachstehenden Randbedingungen zu genügen:

$$\text{in } x = 1, \dots, \sigma_x^{(4)} = 0, \quad \tau_{x,y}^{(4)} = 0,$$

$$\text{in } y = b, \dots, \sigma_y^{(4)} = -\frac{p(x)}{h}, \quad \tau_{x,y}^{(4)} = 0.$$

Aus den Bedingungen für die Normalspannungen folgt unmittelbar

$$C_m^{(4)} = -\gamma_m D_m^{(4)} \operatorname{Ctg} \gamma_m, \quad (43)$$

$$A_m^{(4)} = \frac{b_m}{h \sin \varepsilon_m b} - \varepsilon_m b B_m^{(4)} \operatorname{Ctg} \varepsilon_m b. \quad (44)$$

Die Randbedingungen für die Schubspannungen liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \sum_m [(A_m^{(4)} + B_m^{(4)}) \cos \varepsilon_m y + \varepsilon_m y B_m^{(4)} \sin \varepsilon_m y] \cos m \pi + \\
 \sum_m [(C_m^{(4)} + D_m^{(4)}) \cos \gamma_m x + \gamma_m x D_m^{(4)} \sin \gamma_m x] \cos \gamma_m y = 0, \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_m [(A_m^{(4)} + B_m^{(4)}) \cos \varepsilon_m b + \varepsilon_m b B_m^{(4)} \sin \varepsilon_m b] \cos \varepsilon_m x + \\
 \sum_m [(C_m^{(4)} + D_m^{(4)}) \cos \gamma_m y + \gamma_m y D_m^{(4)} \sin \gamma_m y] \cos m \pi = 0. \quad (46)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten jetzt zwei Reihen in $\cos \gamma_m y$ und $\cos \varepsilon_m x$. Die konstanten Glieder in der zweiten Reihe heben sich weg, in der ersten Reihe reduzieren sie sich auf den Ausdruck

$$\frac{1}{b h} \sum_m \frac{b_m}{\varepsilon_m} \cos \varepsilon_m.$$

Auch dieser Ausdruck verschwindet. Um das einzusehen, schreiben wir die Gleichgewichtsbedingungen (32) in der Form

$$\int_0^1 x p(x) dx = 0.$$

Unter Beachtung von Gl. (34) entsteht

$$\int_0^1 x \sum_m b_m \sin \varepsilon_m x dx = 0.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe sind Integral- und Summenzeichen vertauschbar:

$$\sum_m b_m \int_0^1 x \sin \varepsilon_m x dx = \sum_m \frac{b_m}{\varepsilon_m^2} \left[-\varepsilon_m x \cos \varepsilon_m x + \sin \varepsilon_m x \right]_0^1 = \\ = -\sum_m \frac{b_m}{\varepsilon_m} \cos \varepsilon_m = 0.$$

Die Randbedingungen Gl. (45) und (46) können wir daher durch Nullsetzen der Reihenkoeffizienten erfüllen und erhalten aus Gl. (48), indem wir gemäß Gl. (43) und (44) die Konstanten $C_m^{(4)}$ und $A_m^{(4)}$ durch $D_m^{(4)}$ und $B_m^{(4)}$ ausdrücken,

$$B_m^{(4)} = -\frac{1}{\sin \varepsilon_m b} \frac{\operatorname{Cof} 2 \varepsilon_m b - 1}{\sin 2 \varepsilon_m b - 2 \varepsilon_m b} \left[\frac{b_m}{h} \operatorname{Ctg} \varepsilon_m b + \right. \\ \left. + 4 \varepsilon_m^2 \sum_s (-1)^{m+s} \frac{\gamma_s}{(\varepsilon_m^2 + \gamma_s^2)^2} (D_s^{(4)} \sin \gamma_s) \right] \quad (47)$$

und damit weiter aus Gl. (45)

$$\sum_r a_{sr}^{(4)} (D_r^{(4)} \sin \gamma_r) = c_s^{(4)}. \\ a_{sr}^{(4)} = -\frac{16}{b} (-1)^{r+s} \gamma_s \gamma_r \sum_m \frac{\varepsilon_m^3}{(\varepsilon_m^2 + \gamma_r^2)^2 (\varepsilon_m^2 + \gamma_s^2)^2} \frac{\operatorname{Cof} 2 \varepsilon_m b - 1}{\sin 2 \varepsilon_m b - 2 \varepsilon_m b}, \\ r \neq s, a_{rs}^{(4)} = a_{sr}^{(4)} \frac{r}{s}, \\ a_{ss}^{(4)} = \operatorname{Ctg} \gamma_s - \frac{\gamma_s}{\sin^2 \gamma_s} - \frac{16}{b} \gamma_s^3 \sum_m \frac{\varepsilon_m^3}{(\varepsilon_m^2 + \gamma_s^2)^4} \frac{\operatorname{Cof} 2 \varepsilon_m b - 1}{\sin 2 \varepsilon_m b - 2 \varepsilon_m b}, \\ c_s^{(4)} = \frac{2}{b} \sum_m (-1)^{m+s+1} \frac{b_m}{h} \frac{\varepsilon_m}{(\varepsilon_m^2 + \gamma_s^2)^2} \left[\varepsilon_m^2 - \gamma_s^2 \left(2 \frac{\sin 2 \varepsilon_m b}{\sin 2 \varepsilon_m b - 2 \varepsilon_m b} - 1 \right) \right] \quad (48)$$

V. Zahlergebnisse.

Der zahlenmäßigen Auswertung wurde eine Endstützenbreite von $1/10$ der Feldweite zugrunde gelegt:

$$c = 0.1.$$

Um die Randbelastung für diese Stützbreite einigermaßen richtig durch ihre Fourierreihe wiederzugeben, ist bereits eine größere Anzahl von Gliedern notwendig (es wurden 13 gewählt), was natürlich die Rechnung ziemlich mühsam macht.

Die Auswertung wurde für den Fall durchgeführt, daß die Trägerhöhe gleich der Stützweite ist ($b = 0.5$). Bei größeren Trägerhöhen entspricht die Spannungsverteilung praktisch bereits dem unendlich hohen Träger (Halbscheibe), wie aus den Untersuchungen von Dischinger, Bay und Craemer hervorgeht, die am unendlich langen Balken durchgeführt wurden. Bei kleineren Trägerhöhen nähert sich die Spannung dem Navierschen Wert. Um aber auch diese Verhältnisse näher zu untersuchen und um insbesondere den Einfluß der Trägerhöhe auf den Stützdruck zu verfolgen, wurde die Rechnung für den symmetrisch belasteten Träger auch noch für den Fall $b = 0.25$ durchgeführt (Trägerhöhe gleich halber Stützweite).

Da die Rechnungsergebnisse vorwiegend für den Stahlbetonbau Interesse besitzen, wurde die Querdehnungszahl $\mu = 0$ gesetzt. Der Einfluß von μ ist im übrigen nicht sehr bedeutend, wie aus Formel (31) hervorgeht, die aus der elementaren Balkenbiegungstheorie abgeleitet wurde. Diese ergibt für die Konstante ϱ in Abhängigkeit von b die in Tab. 1 angegebenen Werte.

Tab. 1.

$b =$	0	0.25	0.5	∞
$\mu = 0$	6.25	6.09	5.78	5
$\mu = 0.3$	6.25	6.05	5.71	5

Bei der Ermittlung der Normalspannungen ist es vorteilhaft, nicht die Spannungen selbst, sondern ihre halbe Summe bzw. Differenz zu berechnen. Auf diese Weise lassen sich vor allem die Hauptnormalspannungen und ihre Richtungen am einfachsten feststellen.

1. Symmetrische Belastung mit $b = 0.5$.

In den Spannungsfunktionen $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ wurde in Übereinstimmung mit der Entwicklung der Randbelastung die Gliederzahl der Reihe in x -Richtung mit 13 angenommen, während in y -Richtung 10 Glieder berücksichtigt wurden. Insgesamt waren also zur Festlegung der Spannungsfunktion 92 Konstanten zu berechnen.

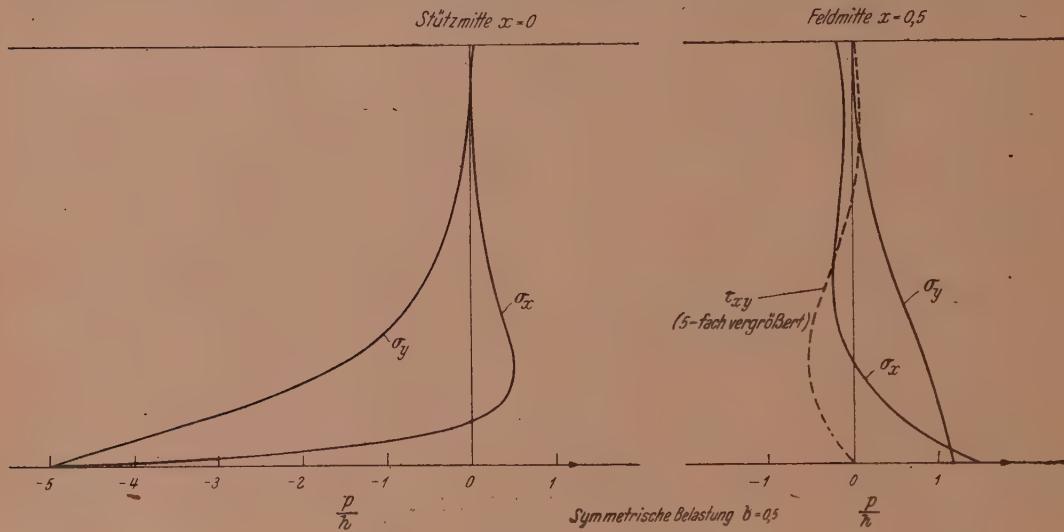


Abb. 9.

Die Diagonalglieder der Matrix der Gleichungssysteme (18) bzw. (27) sind groß gegen die übrigen, so daß einerseits bei Verwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens schon eine geringe Stellenzahl genügend genaue Ergebnisse liefert, anderseits auch die Auflösung nach dem Iterationsverfahren möglich wird.

Gl. (29) gibt für ϱ den Wert

$$\varrho = 5.31,$$

während die elementare Theorie $\varrho = 5.78$ liefert (Tab. 1). Die Mittelstütze erfährt also eine geringere Belastung, als ihr bei geradliniger Spannungsverteilung zukommen würde. Dies hängt damit zusammen, daß der Balken in seinem oberen Teil praktisch spannungsfrei ist und sich daher in seinem Verhalten dem unendlich hohen Träger nähert ($\varrho = 5$).

Längs des Randes $x = \pm 1$ gibt die Teilbelastung „2“ einen nahezu konstanten, von Null verschiedenen Wert von $\tau_{xy}^{(2)}$. Dies hat seinen Grund darin, daß die durch die Fourierreihe mit endlicher Gliederzahl dargestellte Randbelastung kein Gleichgewichtssystem bildet, sondern eine wenn auch kleine Resultierende ergibt, der durch die Randschubspannungen das Gleichgewicht gehalten wird.

Abb. 9 zeigt den Spannungsverlauf im Mittelschnitt $x = 0$ und in Feldmitte $x = 0.5$, in Vielfachen der Randbelastung p/h .

Im Mittelschnitt verschwinden die Schubspannungen. Die Biegespannungen σ_x und die Normalspannungen σ_y bieten im wesentlichen das gleiche Bild wie bei der Halbscheibe. Der obere Teil des Trägers ist praktisch spannungsfrei.

Die Biegerandspannung am Unterrand ist in Feldmitte etwas größer ($\sigma_x/\sigma_y = 1.466/1.188 = 1.234$) als bei der Halbscheibe ($\sigma_x = \sigma_y$). In Stützmitte stimmen die beiden Werte ziemlich genau überein ($\sigma_x = -4.900 \text{ p/h}$, $\sigma_y = -5.052 \text{ p/h}$). Die Abweichungen dürften vor allem auf die endliche Trägerlänge zurückzuführen sein, denn der unendlich lange Träger gibt, wie aus der Arbeit von Dischinger² hervorgeht, praktisch die gleichen Werte wie die Halbscheibe.

In Abb. 10 sind die Hauptnormalspannungslinien eingezeichnet, deren Kenntnis vor allem für den Stahlbetonbau wichtig ist.

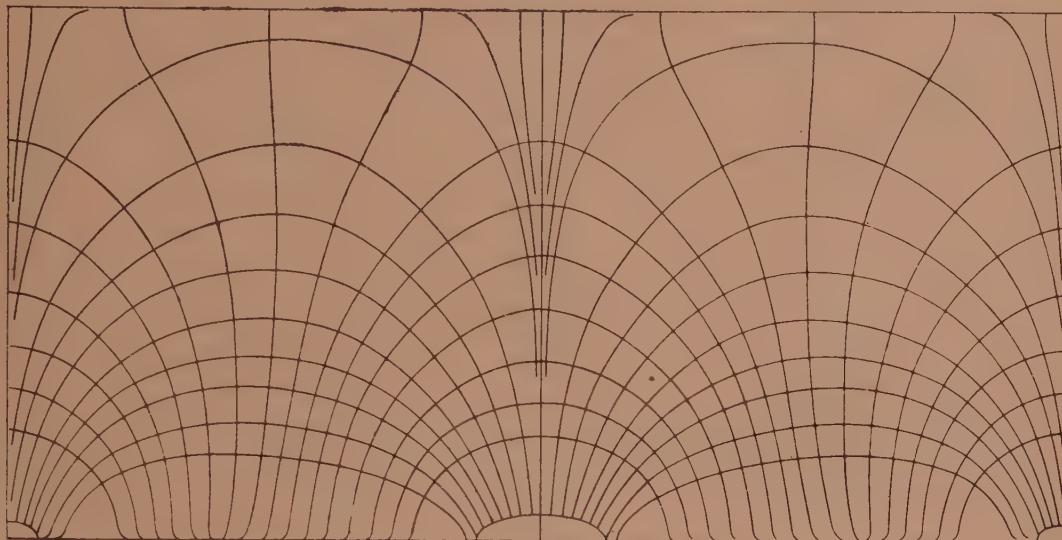


Abb. 10.

2. Antimetrische Belastung mit $b = 0.5$.

In der Fourierreihe für die Randbelastung wurden wieder 13 Glieder berücksichtigt. Bei der Entwicklung der Spannungsfunktion in y -Richtung wurden jedoch nur 6 Glieder in Rechnung gestellt, so daß also hier die Spannungsfunktion durch insgesamt 76 Konstante festgelegt ist.

Am Rand $x = \pm 1$ verschwindet τ_{xy} ⁽²⁾ nicht, sondern gibt einen von Null verschiedenen Mittelwert; die durch die ersten 13 Glieder der Fourierreihe dargestellte Randbelastung ist nämlich auch hier kein Gleichgewichtssystem, sondern liefert ein resultierendes Moment, dem durch die beiden einander entgegengesetzt gerichteten Schubkräfte des linken und rechten Randes das Gleichgewicht gehalten wird.

Im Mittelschnitt verschwinden die beiden Normalspannungskomponenten; es bleibt nur eine Schubspannung.

Die Biegespannung σ_x am Unterrand in Feldmitte ist $\sigma_x = -1.365 \text{ p/h} = 1.365/0.890 \sigma_y = 1.534 \sigma_y$ gegenüber $\sigma_x = -p/h$ bei der Halbscheibe und $\sigma_x = -1.001 \text{ p/h}$ beim unendlich langen Träger.

3. Linkes Feld belastet, rechtes unbelastet. $b = 0.5$.

Dieser Belastungsfall (Abb. 1b) entsteht durch Überlagerung der symmetrischen und antimetrischen Belastung. Im Mittelschnitt ergibt sich daher die Normalspannungsverteilung der symmetrischen und die Schubspannungsverteilung der antimetrischen

Randlasten. Die Werte der Spannungskomponenten in Mitte des belasteten und unbelasteten Feldes sind in Abb. 11 zusammengestellt.

4. Symmetrische Belastung mit $b = 0 \cdot 25$.

Die Rechnung wurde in gleicher Weise durchgeführt, wie unter 1. angegeben, jedoch sind in der Reihenentwicklung in y -Richtung ebenso wie bei der antimetrischen Belastung nur die ersten sechs Glieder berücksichtigt.

Nach Bestimmung der Konstanten \bar{D} und $\bar{\bar{D}}$ ergab sich aus Gl. (31) für ϱ der Wert

$$\varrho = 5 \cdot 75,$$

während die Naviersche Theorie $\varrho = 6 \cdot 09$ gibt (Tab. 1). Wie zu erwarten, ist hier die Abweichung bereits geringer als beim Träger mit der relativen Höhe $b = 0 \cdot 5$.

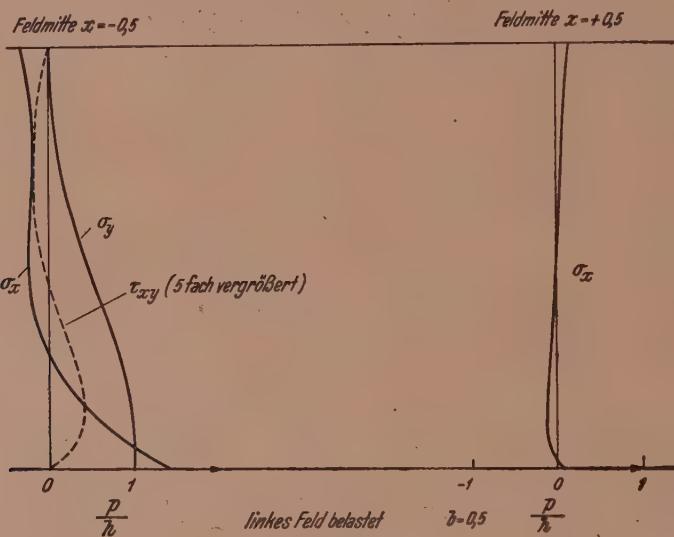


Abb. 11.

Die Spannungsverteilung gleicht im wesentlichen der des unendlich langen Trägers gleicher Höhe.

VI. Zusammenfassung.

Für den wandartigen Träger, das ist ein Träger, dessen Querschnitt aus einem hohen, schmalen Rechteck besteht, wird die Spannungsverteilung im Falle der Lagerung auf drei Stützen angegeben, wobei zwischen Gleichlast in beiden Feldern, feldweise wechselnder Last und Einfeldbelastung unterschieden wird. Die statisch unbestimmte Mittelstützkraft wird berechnet und mit der aus der elementaren Theorie sich ergebenden verglichen.

Die zahlenmäßige Auswertung wird für den Fall durchgeführt, daß die Querschnittshöhe gleich der Stützweite ist. Die statisch unbestimmte Mittelstützkraft wird auch noch unter der Annahme berechnet, daß die Querschnittshöhe gleich der halben Stützweite ist.

(Eingegangen am 19. August 1946.)

Zum zweidimensionalen Feldproblem zweier leitenden Ebenen in beliebiger Lage.

Von F. Cap.

(Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Wien.)

Mit 14 Textabbildungen.

I. Problemstellung.

Das Problem des elektrischen Feldes zwischen zwei leitenden Ebenen in beliebiger Lage hat neben rein wissenschaftlichem Interesse auch einige praktische Bedeutung, besonders für Probleme der Elektrotechnik. Unter der Voraussetzung, daß sich die betrachteten leitenden Ebenen in der einen Abmessung ins Unendliche erstrecken, kann das Problem als zweidimensionales angesehen werden; der Gebrauch funktionentheoretischer Lösungsmethoden ist damit ermöglicht. Die vorgeschlagene Lösung kann selbstverständlich auch auf magnetostatische Probleme angewandt werden.

II. Die Festlegung der beiden Ebenen im Koordinatenraum.

Zur Festlegung der Ebenen in einem rechtwinkeligen cartesischen Koordinatensystem (x, y) werden am besten Polarkoordinaten (r, σ) benutzt. Eine Ebene werde durch folgende drei Angaben charakterisiert:

- a) Ihre Breite (die Länge sei unendlich!); b) und c) die Polar- bzw. cartesischen Koordinaten desjenigen Randpunktes der Spur, der dem Ursprung des Koordinaten-

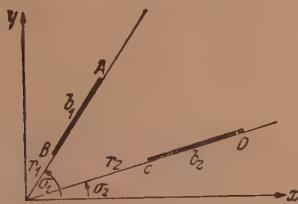


Abb. 1



Abb. 2.

systems am nächsten liegt. Die Ebenen sollen — wie Abb. 1 zeigt — so liegen, daß die Richtung ihrer Spur mit der Richtung des Radiusvektors jenes dem Ursprung zunächst liegenden Punktes übereinstimmt. Zweckmäßig wählt man — was durch

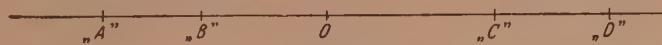


Abb. 3.

Drehung des Koordinatensystems leicht zu erreichen ist — $\sigma_2 = 0$ (Abb. 2). Die „Herstellung“ der beiden Ebenen kann man sich gemäß der Zweizahl der Koordinaten (r, σ) durch zwei aufeinanderfolgende Schritte vorgenommen denken:

I. Zerschneiden der x -Achse an den Stellen A, B, C und D und Entfernung der Zwischenstücke ∞ bis A, B bis C, D bis ∞ (s. Abb. 3).

II. Drehung des Stückes AB (der negativen x -Achse) um 0 als Drehzentrum um den Winkel $(180 - \sigma_1)$.

Die schrittweise vorgenommenen funktionentheoretischen Transformationen sollen diesem Wege folgen.

III. Die funktionentheoretische Formulierung des Schrittes I.

J. J. Thomson hatte bekanntlich (z. B. Handbuch der Physik von Geiger-Scheel, Bd. XII, S. 476, Aufl. 1927, Springer-Verlag, Berlin) nach dem Vorgang von Maxwell (nachzusehen, auf welche Leiteranordnung eine gegebene Funktion als Lösung paßt) bereits festgestellt, daß die elliptische Funktion $z = \sin w$ das Feld von zwei gleich breiten, zum Ursprung symmetrisch auf der x -Achse liegenden Streifen der Potentiale K (wo K das vollständige Normalintegral 1. Gattung) darstellt. Diese von Thomson selbst bewiesene Lösung (der Beweis wird am Schluß des Abschnittes gebracht) soll im folgenden mit Hilfe des bekannten Schwarz-Christoffelschen Abbildungsverfahrens abgeleitet werden; darüber hinaus soll auch das Problem ungleich breiter, auf beliebigem Potential befindlicher Platten in beliebiger Lage zueinander in Angriff genommen werden.

Üblicherweise werden bei elektrostatischen Problemen sowohl die Polygonspur der Leiter in einer z -Ebene als auch die Linien konstanten Potentials in einer w -Ebene ($z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$) zugleich auf die reelle Achse einer Hilfsebene t abgebildet. Durch Elimination des Parameters t aus beiden Abbildungsfunktionen wird dann der direkte Zusammenhang zwischen den Ortskoordinaten (x, y) und den „Potentialkoordinaten“ (φ, ψ) hergestellt. Hiervon soll im folgenden abgegangen werden; es soll gleich die w -Ebene auf die z -Ebene abgebildet werden. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn man zunächst die z -Ebene auf die w -Ebene abbildet und dann die Umkehrfunktion bestimmt.

a) Allgemeiner Fall: Beliebiges Potential und beliebige Abmessungen.

Das Potentialbild in der w -Ebene zweier verschieden breiter Platten, die sich auf beliebigem Potential φ befinden, sieht so aus, wie Abb. 4 zeigt.

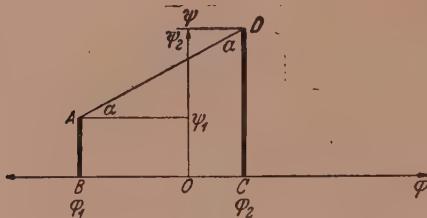


Abb. 4.

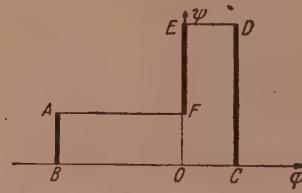


Abb. 5.

Hierbei bedeutet: φ_1 das Potential der Platte AB (AB ist gleichzeitig die Plattenbreite); φ_2 das Potential der Platte CD ; ψ_1 und ψ_2 bestimmen die Lage von A und D und damit die Plattenbreiten.

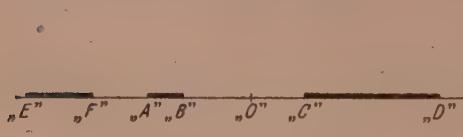


Abb. 6.

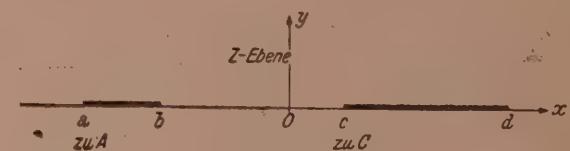


Abb. 7.

Die Punkte AD müssen durch eine schiefe Gerade verbunden werden; verbindet man sie nämlich durch eine Gerade parallel zur φ -Achse, wie Abb. 5 zeigt, so erhält man bei der Abbildung des Potentiallinienzuges auf die z -Ebene dort das Bild von 3 Platten, etwa so wie Abb. 6 zeigt.

Auch hat man dann 6 Drehpunkte und damit 6 Winkel in der w -Ebene anzunehmen, was natürlich zu wesentlich komplizierteren Integralen führt. Verbindet

man aber A und D , wie Abb. 4 zeigt, so erhält man in der z -Ebene ein Bild, wie Abb. 7 zeigt.

Der Winkel α soll mit 45° gewählt werden. Da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{CD} - \overline{AB}}{|\varphi_1| + |\varphi_2|} = 1 \quad (\text{s. Abb. 4})$$

wird durch geeignete Wahl der Plattenabmessung \overline{DC} und \overline{AB} sowie der Potentiale φ_1 und φ_2 dies leicht zu machen sein, ohne der Allgemeinheit der Lösung einen großen Abbruch zu tun.

Aus der Schwarz-Christoffelschen Formel

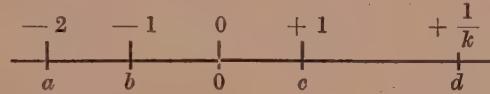
$$w = C \cdot \int \frac{dz}{(z-a)^{1-\alpha} \cdot (z-b)^{1-\beta} \cdot (z-c)^{1-\gamma} \cdot (z-d)^{1-\delta}} + C'$$

für die Abbildung der oberen Halbebene der z -Ebene auf ein Polygon (Trapez) $ABCD$ der w -Ebene mit den Innenwinkeln $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi, \delta\pi$ und den Drehpunkten a, b, c und d auf der x -Achse erhält man auf Grund der obigen Verfügung über α die Formel

$$w = C \int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)^{\frac{3}{2}} (z-b) (z-c) (z-d)^{\frac{1}{2}}}} + C'. \quad (1)$$

Da nun bekanntlich von den vier Größen a, b, c, d drei beliebig gewählt werden können — für die wirklichen Potentiale und Abmessungen sind ja erst die Punkte A, B, C und D maßgebend —, kann durch die willkürliche Festsetzung

$$a = -2; \quad b = -1; \quad c = +1; \quad d = +\frac{1}{k} (> 1) \quad k \text{ echter Bruch}$$



das Integral (1) weiter vereinfacht werden. Ganz willkürlich dürfen jedoch die Größen a, b, c und d auch nicht gewählt werden; z. B. darf der Wert Null nicht gewählt werden, da der Punkt Null bei der nachfolgenden Drehung den Drehpunkt bildet; auch die Reihenfolge, also $a < b < c < d$ muß beibehalten werden; würde z. B. d kleiner als a festgesetzt, so zerfiele die eine Platte in zwei Stücke, die sich erst im Unendlichfernen treffen würden. Mit der obigen Festsetzung geht (1) über in

$$w = \bar{C} \int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)(z+2)^{\frac{3}{2}} (1-z) (1-kz)^{\frac{1}{2}}}} + C' = o(z). \quad (2)$$

Würde man einen der Punkte, etwa b oder d , in den unendlich fernen Punkt legen, so würde zwar einer der vier Klammerausdrücke unter der Wurzel verschwinden und sich das Integral damit vereinfachen, aber es würde sich dann eine Platte bis in den unendlich fernen Punkt erstrecken. Das Integral (2)

$$\begin{aligned} w(z) &= C \int (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z+2)^{-\frac{3}{2}} \left(z - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{4}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} dz + C' \\ &= C \int z dz + C' \quad \text{wo } z = X + i Y \end{aligned} \quad (2')$$

dürfte geschlossen wohl kaum auswertbar sein.¹ Die Berechnung durch eine Reihenentwicklung soll im folgenden kurz gestreift werden. Zunächst soll die Berechnung der Werte k, C, \bar{C}, C' besprochen werden. $C' = 0$, wenn der Nullpunkt der z -Ebene und der Nullpunkt in der w -Ebene übereinstimmen. \bar{C} lässt sich aus C berechnen

¹ Herrn Dr. Schmetterer vom Mathematischen Seminar der Universität möchte ich bei dieser Gelegenheit danken für einige Ratschläge bezüglich des Integrals (2).

(Heraushebung des k). Zur Berechnung bzw. Bestimmung von k , C' und C gibt es zwei Wege:

I. Entweder man wählt k , C' und C und muß dann die Koordinaten der Punkte A , B , C und D der w' -Ebene durch Einsetzen der Werte von a , b , c und d in $w(z)$ berechnen (was mathematisch einfacher sein dürfte; man hat aber dann — außer durch Maßstabsänderungen bei der Zeichnung, z. B. Festsetzung: K entspricht 200 V, $0 \cdot 5 K$ entspricht 100 V — keine Verfügungsmöglichkeit mehr über die Plattenabmessungen und das Plattenpotential, außer eben der freien Wahl von k , doch weiß man ja von vornherein nicht, welches Potential zu einem bestimmten k -Wert herauskommt).

II. Oder man gibt die Koordinaten von A , B , C und D — also die Plattenabmessungen und ihr Potential vor — und berechnet durch Einsetzen die Werte von k und C . Eine der vier die Größen C , C' und k bestimmenden Gleichungen (es sind ja vier Eckpunkte da!) ist überflüssig.

Zur Berechnung des Integrals (2') entwickelt man jeden der drei Faktoren $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(z + 2)^{-\frac{3}{2}}$ und $(1 - kz)^{-\frac{1}{4}}$ in eine Potenzreihe, die bei absoluter Konvergenz auf demselben Konvergenzgebiet miteinander multipliziert werden dürfen. Die sich aus der Multiplikation ergebende Potenzreihe wird dann gliedweise integriert.

Die Potenzreihen der Ausdrücke $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $(1 - kz)^{-\frac{1}{4}}$ sind im Einheitskreis sicher konvergent. Um beim Ausdruck $(z + 2)^{-\frac{3}{2}}$ ebenfalls Konvergenz im Einheitskreis zu erreichen, formt man den Ausdruck am besten in $2^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{z}{2} + 1\right)^{-\frac{3}{2}}$ um.

Der binomische Lehrsatz ergibt folgende Reihenentwicklungen:

$$(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{3}{8} z^4 + \frac{15}{48} z^6 + \dots \quad |z| < 1,$$

$$(z + 2)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}z + \frac{15}{32}z^2 - \frac{105}{384}z^3 + \dots\right) \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1,$$

$$(1 - kz)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}kz + \frac{5}{32}k^2z^2 + \frac{45}{384}k^3z^3 + \dots \quad 0 < k < 1; \quad |z| < 1.$$

Nach der Multiplikation und Integration (die erlaubt ist, da die Reihen konvergente Potenzreihen sind) erhält man für $w(z)$ eine Potenzreihe der Form $w = \sum_j a_j z^j$, deren weitere Behandlung im Abschn. V besprochen werden soll.

b) Sonderfall I: Beliebiges Potential, aber gleiche Plattenbreite.

Für den Sonderfall, daß die Platten gleich breit sind, erhält man in der w -Ebene ein Rechteck. Das Integral (2) nimmt dann die folgende Form an:

$$w = \bar{C} \int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)(z+2)(1-z)(1-kz)}} + C' \quad (3)$$

Dieses Integral ist bekanntlich vom elliptischen Typ und läßt sich geschlossen auswerten. Das Bild in der w -Ebene sieht so aus, wie Abb. 8 zeigt. Die das Potential und die Plattenabmessungen festlegenden Konstanten k , C und C' können hier (s. z. B. Fall c) nach II durch Festsetzen der Koordinaten der Punkte A , B , C und D einfacher als beim Fall a gewonnen werden, wobei jedoch stets $\overline{AB} = \overline{CD}$ sein muß. Natürlich ist auch die Anwendung der Methode I möglich.

Die Zurückführung des Integrals (3) auf die elliptischen Normalintegrale kann bekanntlich auf mehreren Wegen geschehen, die in der Literatur über elliptische Integrale genügend breit besprochen sind. Es sollen nur zwei Wege angedeutet werden:

Entweder man setzt (Integraltafel von Gröbner-Hofreiter u. a.)

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(z+1)\left(z+\frac{1}{k}\right)\left(z-\frac{1}{k}\right)}} = J_0 = \int \frac{dz}{y}; \quad y = \frac{\cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{(c \sin \varphi + d)^2} \cdot \gamma;$$

wo $x = \frac{a \sin \varphi + b}{c \sin \varphi + d}$; $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; $dx = \frac{(ad - bc) \cos \varphi}{(c \sin \varphi + d)^2} d\varphi$,

$$\bar{k} = \frac{\frac{4}{k} + 2 - 2 \sqrt{3 \left(\frac{1}{k} + 1\right) \left(\frac{1}{k} - 1\right)}}{4 + \frac{2}{k}}; \quad c = \frac{1}{k} + 2 - 2 \bar{k}; \quad d = \frac{1}{k} - 2;$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 2\right) \cdot c - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + 2\right) d; \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 2\right) d - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + 2\right) c;$$

$$c = \frac{1}{k} + 2 - 2 \bar{k}; \quad d = \frac{1}{k} - 2;$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + 2\right) (c^2 - d^2); \quad \gamma = \frac{\delta^2}{\sqrt{(c^2 - d^2)(c^2 - \bar{k}^2 d^2)}}$$

und erhält $J_0 = \frac{\delta}{\gamma} F(\varphi, \bar{k})$, wo F das elliptische Normalintegral erster Gattung bedeutet.

Oder man zerlegt das Polynom vierten Grades in zwei quadratische Faktoren (s. z. B. Krause, Elliptische Funktionen). Man erhält so — über zwei Zwischenstufen — letzten Endes wieder das Normalintegral erster Gattung, dessen Modul und Amplitude zu berechnen sind aus den in (3) enthaltenen Größen mit Hilfe von Beziehungen, die man im Laufe der Transformationen gewinnt.

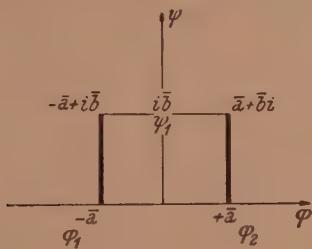


Abb. 8.

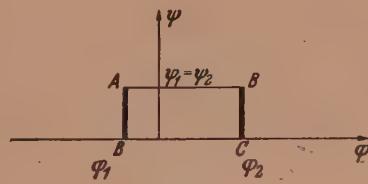


Abb. 9.

c) Sonderfall II: Gleichbreite Platten auf entgegengesetzt gleichem Potential.

Noch einfacher werden die Rechnungen bei gleichbreiten Platten, die sich auf entgegengesetzt gleichem Potential befinden. Das Rechteck in der Potentialebene werde festgelegt, wie Abb. 9 zeigt. Das Potential der Platten ist dann \bar{a} , ihre Breite ist \bar{b} . Die Drehpunkte auf der reellen Achse der z -Ebene werden — was wegen der symmetrischen Lage des Rechteckes zum Ursprung der w - und z -Ebene möglich ist — wie folgt festgesetzt: $a = -\frac{1}{k}$, $b = -1$, $c = +1$, $d = +\frac{1}{k}$.

Das Integral (3) erhält dann folgende Form:

$$w(z) = C \int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(z+1)\left(z+\frac{1}{k}\right)\left(z-\frac{1}{k}\right)}} + C'$$

oder

$$w(z) = \frac{\bar{c}}{c k} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} + C'.$$

Das ist das elliptische Normalintegral erster Gattung.

Die Methode II liefert:

$$w = 0; \quad z = 0; \quad 0 = C';$$

$$w = \pm a; \quad z = \pm 1; \quad \bar{a} = \pm k C F(1, k) = \pm k C K;$$

wo K das vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung ist;

$$w = \bar{a} + \bar{b} i; \quad z = \frac{1}{a}; \quad \bar{a} + \bar{b} i = k C F\left(\frac{1}{k}, k\right) = k C (K + i K');$$

$$w = -\bar{a} + \bar{b} i; \quad z = -\frac{1}{a}; \quad -\bar{a} + \bar{b} i = k C (-K + i K'),$$

wo K' das vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung zu dem konjugierten Modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ist.

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$C' = 0, \quad \bar{C} = \frac{a}{K} = \frac{b}{K'}, \quad \text{mit } \bar{C} = k C; \quad \text{oder} \quad \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{K}{K'}.$$

Es fehlt nun noch die Bestimmung von k (k'), das den Zahlenwert von K und K' festlegt (K und K' sind Funktionen von k allein).

Bekanntlich (s. einschlägige Lehrbücher über Theorie der elliptischen Funktionen) gelten folgende Beziehungen:

und

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = e^{-\pi \frac{b}{a}}$$

sowie

$$k^2 = \frac{16 q (1 + q^2 + q^6 + \dots)^4}{(1 + 2q + 2q^4 + \dots)^4}$$

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + 2 \frac{k^2}{8} + 9 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + 50 \left(\frac{k^2}{8} \right)^3 + \dots \right]$$

und in gleicher Weise für K' , wenn k durch k' ersetzt wird. Mit diesen Formeln aus der Theorie der Jakobischen elliptischen Funktionen kann man aus einem bestimmten \bar{a} und \bar{b} zunächst das q , hieraus das k und k' sowie die Werte von K und K' berechnen. Als Probe gilt: $\frac{K}{K'} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}, \quad \bar{C} = \frac{\bar{a}}{K} = k C$.

Die Umkehrfunktion von $w = \frac{\bar{a}}{K} F(z, k)$ ist $z = \frac{\bar{a}}{a} sn w$. Diese Funktion liefert also das Feld zweier gleich breiter, auf entgegengesetztem gleichem Potential befindlicher Platten. Setzt man \bar{a} (Potential) $= \pm K$ (durch geeignete Wahl des Maßstabes kann hierbei immer noch jede Volt- und Amperewindungszahl erfaßt werden) und setzt man gleichzeitig $\bar{b} = \pm K'$, so erhält man $z = sn w$ oder $x + i y = sn(\varphi + i \psi)$. Thomson bringt für seine schon eingangs erwähnte Behauptung folgenden Beweis (Handbuch; s. vorne): Für die Platte, wo $\varphi = \pm K$, erhält man durch Anwendung des reellen Additionstheorems der Funktion sn :

$$x + i y = sn(K + i \psi) = \frac{sn(K) cn(i \psi) dn(i \psi) + sn(i \psi) cn(K) dn(K)}{1 - k^2 sn^2(K) sn^2(i \psi)};$$

nun ist $sn(K) = 1, cn(K) = 0$ und $1 - k^2 sn^2(i \psi) = dn^2(i \psi)$, daher folgt weiter $= \frac{cn(i \psi) dn(i \psi)}{dn^2(i \psi)}$ und da $\frac{cn(i \psi)}{dn(i \psi)} = \frac{1}{dn(\psi, k')}$, so ist $x + i y = \frac{1}{dn(\psi, k')}$. $dn(\psi)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode $2K$. Innerhalb des Intervales K nimmt sie ihren kleinsten und größten Wert einmal an. Für reelle Argumentwerte ist die Funktion reell, daher

$$x = \frac{1}{dn(\psi, k')}, \quad dn(K', k') = k;$$

für $\psi = 0$ erhält man $x = \pm 1$
für $\psi = \pm K'$ erhält man $x = \pm 1/k$ } Anfang und Ende der Platten

IV. Die funktionentheoretische Formulierung des Schrittes II.

Um nun die in der x -Achse nebeneinanderliegenden Platten in die allgemeine Lage zu bringen, ist noch ein zweiter Schritt nötig — eine Drehung um den Winkel $(180 - \sigma_1)^\circ$. Dies kann durch eine einfache Potenz erreicht werden.

Die Funktion $u = \sqrt[n]{v}$ bildet ja bekanntlich die obere Halbebene der u -Ebene auf einen Winkelraum $\frac{\pi}{n}$ der v -Ebene ab. Sei $P(w) = z$ die Umkehrfunktion der Funktion $w = o(z)$, so wird das Feld zweier Platten, die um den Winkel $\sigma_1 = \frac{\pi}{n}$ gegeneinander geneigt sind, dargestellt durch:

$$\bar{z} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{P(w)} = \bar{x} + i \bar{y} = \sqrt[n]{P(\varphi + i x)} = \sqrt[n]{G(\varphi, \psi) + i H(\varphi, \psi)} = \sqrt[n]{x + i y}. \quad (4)$$

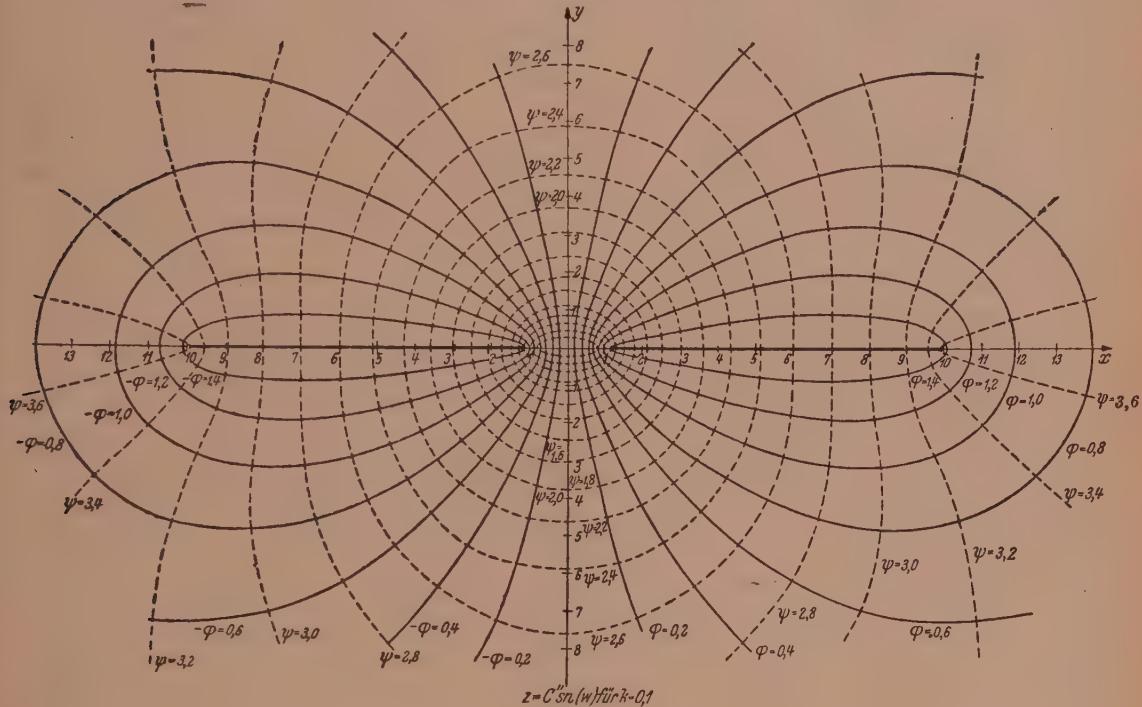


Abb. 10.

Durch geeignete Wahl von n kann daher jeder Winkel hergestellt werden. Ist n größer als 1, erfolgt also die Drehung im Uhrzeigersinn, so hat die Transformation den Nachteil, daß weitere Platten auftauchen; sei z. B. $n = 4$, so erscheint auf der positiven y -Achse, auf der negativen x -Achse und auf der negativen y -Achse eine neue Platte; aber auch unter den Winkeln 135° , 225° und 315° zur positiven x -Achse erscheinen neue Platten, so daß die neue Funktion das Feld von insgesamt acht Platten beschreibt und über den Raum außerhalb des ursprünglichen Plattenpaars gar nichts aussagt. Um diesem Übelstande abzuhelpfen, d. h. um eine Lösung für den Außenraum zu erhalten, wählt man zweckmäßig das n kleiner als 1; die Drehung erfolgt dann im Gegenuhrzeigersinn, wie die obenstehende Abb. 10 zeigt. Für $\bar{z} = z^n$ gilt dann $n' = 2 - \mu$ und $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 = \mu \pi$. Allerdings liefert diese Lösung nicht das Feld im Innenraum zwischen den Platten, da nach Überschreitung der Linie mit dem Winkel $\bar{\sigma}_1$ zur positiven x -Achse die Funktion auf ein anderes Blatt der Riemannschen Ebene gelangt.

Um nun diese Rechnung mit $P(w)$ auszuführen, muß man die Umkehrfunktion zuerst bestimmen. Es ist aber nur $o(z)$ als Reihe (in Spezialfällen als geschlossener Ausdruck) gegeben. Ist $o(z)$ als geschlossener Ausdruck — elliptisches Normalintegral erster Gattung — gegeben, so kann auch $P(w)$ als geschlossener Ausdruck angegeben werden. Etwas umständlicher und mühsamer ist die Gewinnung von P , wenn o nur als Reihe vorliegt (s. folgenden Abschnitt). — Um die Rechnung einfacher zu gestalten, wird man in der Praxis natürlich trachten, mit ganzzahligen Werten von n — also mit den Winkeln 90, 60, 45 usw. Grad auszukommen. Prinzipiell ist jedoch — wie der folgende Abschnitt zeigt — auch die praktische Berechnung mit jedem rationalen n -Wert möglich.

Zum Ausziehen der Wurzel bietet sich wieder die binomische Reihe an; solange P noch aus zwei Gliedern (G und H) besteht, scheint diese Methode noch einigen praktischen Erfolg zu besitzen; bestehen jedoch G und H selbst wieder aus Potenzreihen, so erscheint diese Methode praktisch nicht anwendbar. Es soll darum ein anderer Weg beschritten werden.

V. Die Gewinnung der Potential- und Stromfunktion als Funktionen der Koordinaten.

Damit, daß man die Funktion $\bar{z}(w)$ kennt, ist die Potentialaufgabe noch nicht gelöst; man will ja die Funktionen $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ und $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ oder besser $\bar{x}(\varphi, \psi)$ und $\bar{y}(\varphi, \psi)$ kennenlernen; letztere beiden Funktionen sind für die Anfertigung von Zeichnungen weitaus bequemer (man kann dann nämlich die Kurven $\varphi, \psi = \text{konst.}$ sofort ohne Interpolation zeichnen).

Bei der Lösung dieser Aufgabe sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Allgemeiner Fall, $o(z)$ als Potenzreihe gegeben.

$$w = o(z) = \sum a_j \cdot z^j.$$

In diesem Fall müssen die Potenzen $(x + iy)^j$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes berechnet werden. Man dürfte jedoch — infolge der raschen Konvergenz binomischer Reihen — mit den ersten vier Gliedern das Auslangen finden können. Man erhält so:

$$\varphi = \sum_{k,l} b_{kl} x^k y^l; \quad \psi = \sum_{r,s} c_{rs} x^r y^s \quad k, l, r, s = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

φ und ψ müssen nun nach (5) für etwa je 10 x - und 10 y -Werte berechnet werden. Dann bildet man durch Umschreiben in eine andere Tabelle die Umkehrfunktionen

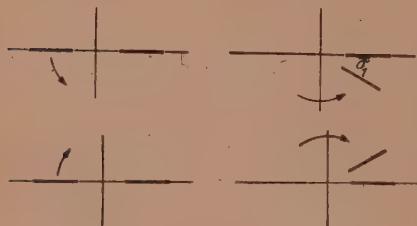


Abb. 11.

$x = G(\varphi, \psi)$ und $y = H(\varphi, \psi)$. Um sich hierbei Interpolationen auf gleiche φ - und ψ -Werte zu ersparen oder zumindest um die Interpolationsarbeit einzuschränken, wird man trachten, nach Wahl des x -Wertes den y -Wert so zu wählen, daß man wieder auf einen φ - (ψ -) Wert kommt, der schon einmal (mit einem anderen Wertepaar) berechnet wurde. Man hätte dann z. B. — zumindest theoretisch — bei 10 x - und 10 y -Werten nicht 100 φ - (und ψ -) Werte, sondern nur 10 (in der Zeichnung fallen die φ - und ψ -Punkte zusammen; der Unterschied zwischen den beiden Kurvenscharen besteht ja nur in der Art der Verbindung der Punkte des „Potentialpunktthaufens“). Zur besseren Übersicht vor der Transformation des zweiten Schrittes ist es vielleicht empfehlenswert, die durch den ersten Schritt erzeugte Abbildung graphisch darzustellen (s. Abb. 11).

Hat man so den Wertevorrat von $x = G(\varphi, \psi)$, $y = H(\varphi, \psi)$ gefunden, so verläuft der weitere Weg wie unter b angegeben.

b) Spezialfall, $\sigma(z)$ und $P(w)$ als geschlossene Ausdrücke gegeben.

Sei z. B. $z = sn w$. In diesem Fall (auf den sich die Fälle 3b und 3c zurückführen lassen) wendet man das Additionstheorem der Funktionen an, und zwar am besten das komplexe (' bedeutet, daß die Funktion den konjugierten Modul besitzt). Man erhält:

$$z = x + i y = sn w = sn(\varphi + i x) = \frac{sn \varphi d n' \psi}{N(\varphi, \psi)} + i \frac{cn \psi sn' \psi cn' \psi dn \varphi}{N(\varphi, \psi)} = G + i H,$$

$$N(\varphi, \psi) = cn'^2 \psi + k^2 sn^2 \varphi sn^2 \psi.$$

Hier sind gleich $G(\varphi, \psi)$ und $H(\varphi, \psi)$, also $x(\varphi, \psi)$ und $y(\varphi, \psi)$ gegeben. Infolge der Periodizitäts- und Symmetrieeigenschaften der Jakobischen elliptischen Funktionen

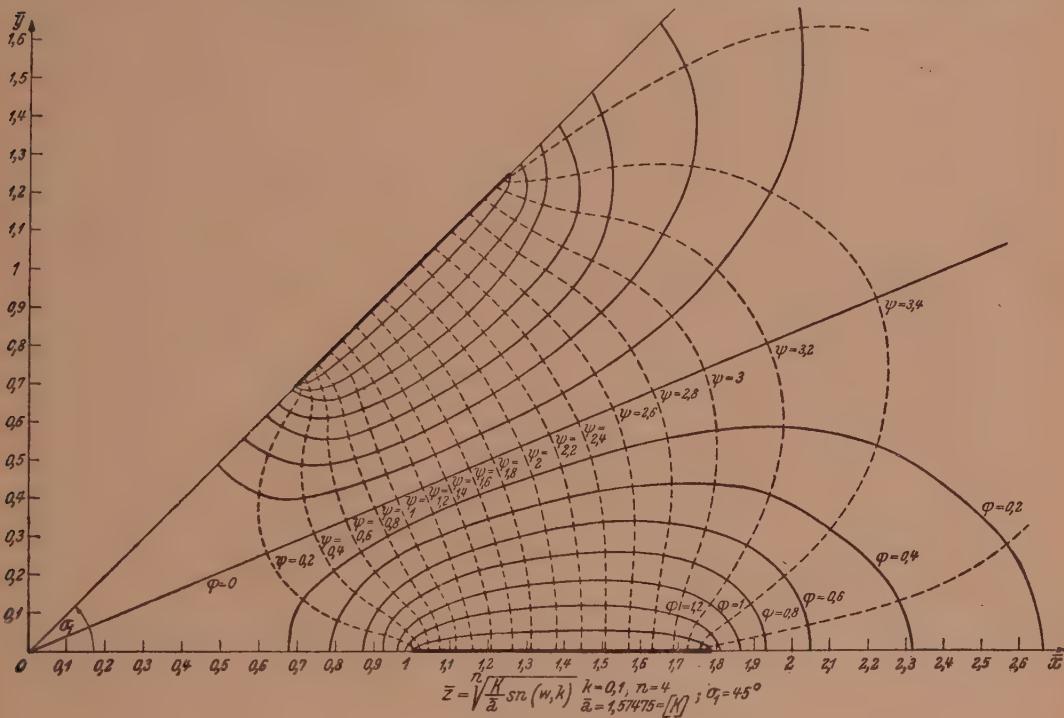


Abb. 12.

braucht φ bloß von 0 bis K und ψ von 0 bis K' laufen. Man kommt mit etwa je 10 Werten aus (Abb. 11).

Der Schritt zwei wird sowohl im Fall a als auch im Fall b in Polarkoordinaten vorgenommen.

Es ist

$$\bar{x} + i \bar{y} = \sqrt[n]{G + i H} = \bar{z},$$

für $n = 1$ wird

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv x = G; & \bar{z} &= r e^{i\theta} = \sqrt[n]{R} e^{\frac{i\theta}{n}}; & r &= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}; \\ \bar{y} &\equiv y = H; & & & \theta &= \arctg \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \end{aligned}$$

wo

$$R = \sqrt{G^2 + H^2},$$

$$\Theta = \arctg \frac{H}{G},$$

dann ist schließlich

$$r = \sqrt[n]{G^2 + H^2}; \quad \theta = \frac{1}{n} \arctg \frac{H}{G}.$$

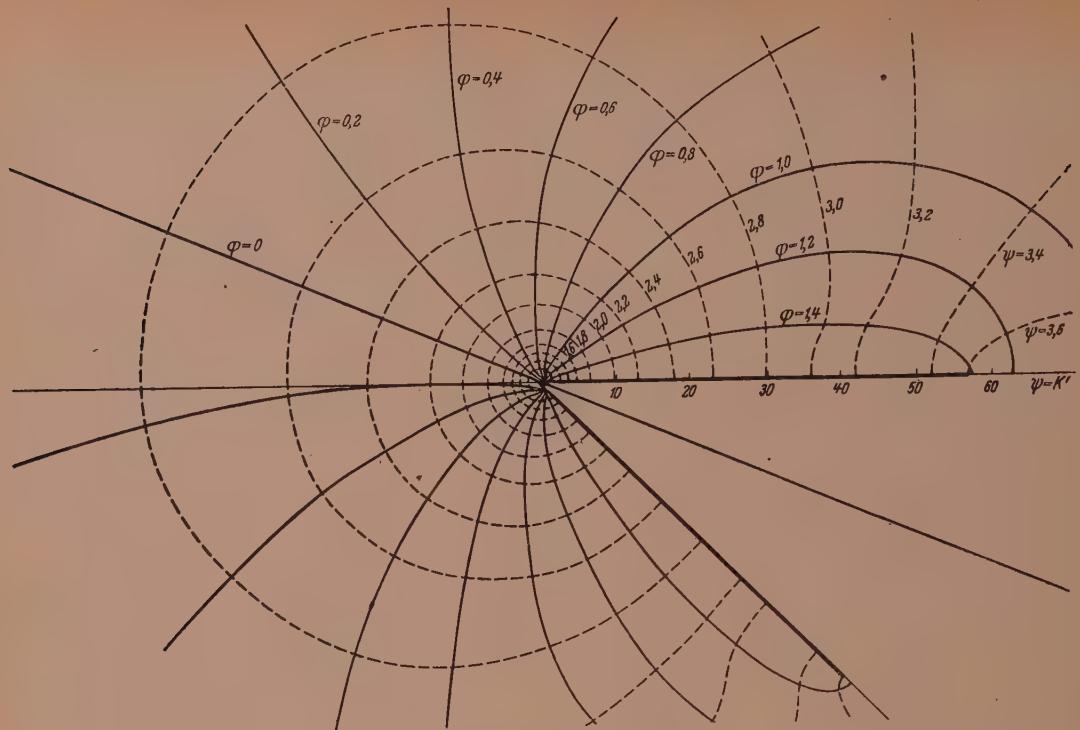


Abb. 13.

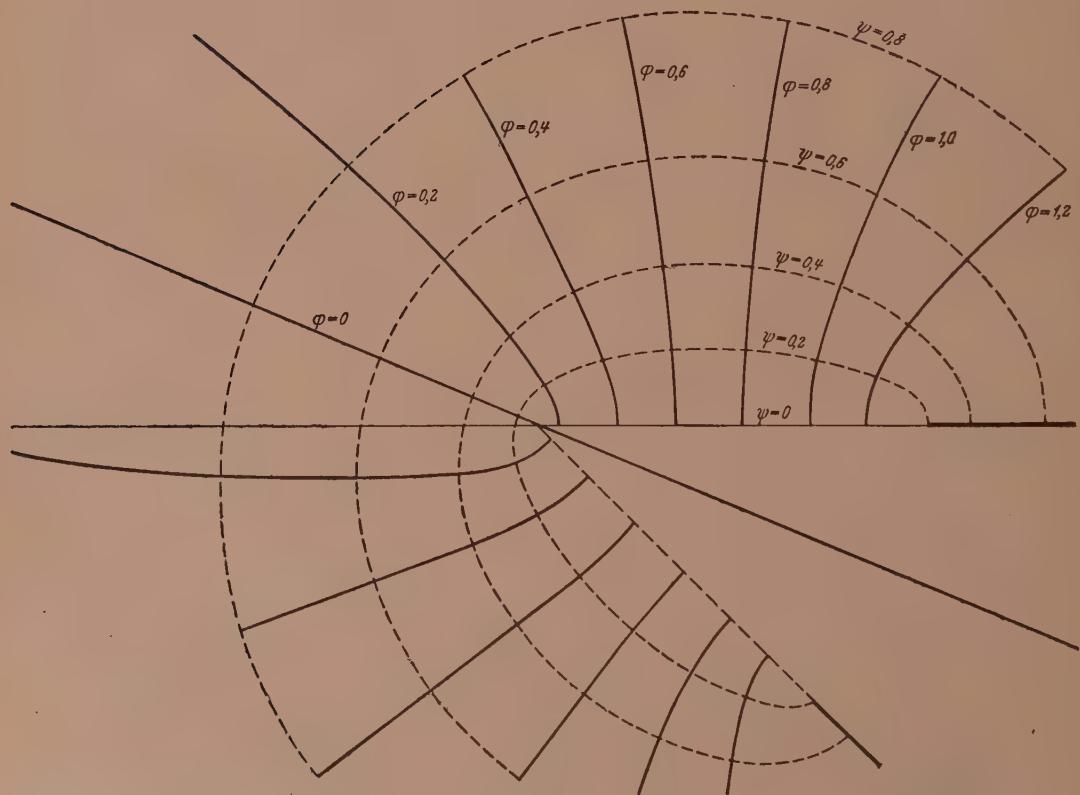


Abb. 14.

Die Praxis hat gezeigt, daß es für die Zeichnung vorteilhafter und übersichtlicher ist, wieder auf cartesische Koordinaten zurückzurechnen. Man erhält:

$$\bar{x} = r \cos \vartheta; \quad \bar{y} = r \sin \vartheta.$$

Als Beispiel wurde in Abb. 12 das Potentialfeld zweier um 45° gegeneinander geneigter Platten gebracht.

Für \bar{z} ergibt sich:

$$\bar{z} = \bar{x} + i \bar{y} = z^{n'} = \bar{r} e^{i \bar{\vartheta}}; \quad \bar{r} = (G^2 + H^2)^{\frac{n'}{2}};$$

$$\bar{\vartheta} = n' \arctg \frac{H}{G}; \quad \bar{x} = \bar{r} \cos \bar{\vartheta}; \quad \bar{y} = \bar{r} \sin \bar{\vartheta};$$

so z. B. für den Winkel $|\sigma_1| = 45^\circ$ ergibt sich $n' = \frac{7}{4}$; man erhält so Abb. 13 und für den Raum um den Ursprung Abb. 14. In Abb. 12 ist dasselbe Feld für $n = 4$ dargestellt.

Interessant wäre es vielleicht noch, Grenzfälle, wie z. B. unendlich kleiner Winkel oder Transformation des Nullpunktes in den unendlich fernen Punkt, wobei die Platten parallel werden müßten (und sich die Jakobische ξ -Funktion als Lösung ergeben müßte), zu untersuchen.

VI. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde unter Verwendung des Schwarz-Christoffelschen Abbildungsverfahrens ein Lösungsvorschlag für das Feld zwischen zwei leitenden Ebenen in beliebiger Lage zueinander gemacht. Es erwies sich, daß das Feld gleichbreiter Platten auf beliebigem Potential durch eine elliptische Funktion dargestellt werden kann und daß das Feldproblem von Platten beliebiger Abmessungen auf komplizierte Integrale führt, die nur durch eine etwas umständliche Reihenentwicklung und durch gliedweise Integration der Reihe zu reduzieren sind. — Der Verfasser dankt seinem verehrten Lehrer und Institutschef, Herrn Prof. Dr. H. Thirring, für die ihm zuteil gewordene weitgehendste Förderung, die das Zustandekommen der Arbeit erst ermöglichte. Der Verfasser dankt weiters Herrn Prof. Dr. Gauster-Filek von der Technischen Hochschule für die Anregung des Problems und Frl. G. Hartl und Herrn W. Weigert für die Ausführung von Zeichnungen und numerischen Rechnungen.

(Eingegangen am 13. September 1946.)

Die Beanspruchung einer Druckschachtpanzierung bei unvollständiger Umschließung.

Von K. Girkmann, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Die folgende Untersuchung befaßt sich mit einem kreiszylindrischen Druckrohr, das in einem bergmännisch hergestellten Schacht verlegt und in einem, satt an den Fels anschließenden Betonkörper eingebettet ist: Abb. 1. Das Rohr wird aus einem zähplastischen Stahl erzeugt; seine Teilstücke werden heute meist mit Hilfe von Werks- und Baustellenschweißungen zusammengefügt.

Die Wandstärke der Rohre ist stets klein gegenüber dem Rohrhalbmesser, und dieser ist stets klein gegenüber der Rohrlänge. In der Praxis werden diese dünnwandigen Rohre als freiliegend, aber unter Zugrundelegung teilweise erhöhter zulässiger Spannungen für einen Innendruck p_i bemessen, der aus dem jeweils größten

statischen Druck und aus einem entsprechenden, den dynamischen Einfluß der Betriebsbelastung berücksichtigenden Zuschlag gebildet wird. Indem man sich zuweilen mit einer verhältnismäßig geringeren, auf das freiliegende Rohr bezogenen Sicherheit gegen Erreichen der Fließgrenze des Rohrwerkstoffes begnügt, setzt man voraus, daß ein wesentlicher Anteil p_a des Innendruckes p_i vom umschließenden Betonzyylinder und vom Gebirge, die das Rohr an seiner Verformung behindern und dadurch zum Mittragen gezwungen werden, übernommen wird. Die Größe dieses Druckanteiles p_a hängt vor allem vom elastischen Verhalten des Gebirges ab. Vereinzelt durchgeführte Dehnungsmessungen an Druckrohren ließen erkennen, daß unter günstigen Verhältnissen mehr als die Hälfte des einwirkenden Innendruckes an die Rohrumhüllung weitergeleitet wird.

Der fragliche Rohraußendruck p_a kann unter bestimmten idealisierenden Voraussetzungen und sofern das elastische Verhalten des Gebirges hinreichend genau er-

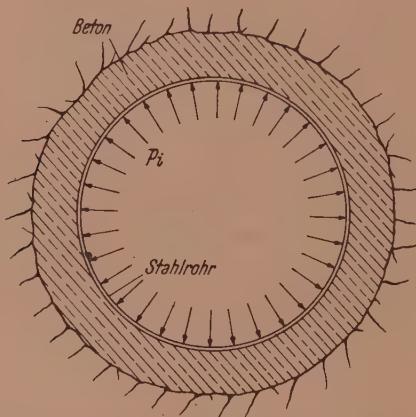


Abb. 1. Querschnitt des Druckschachtes. Der Betonkörper schließt an den Fels und auch an das Rohr dicht an.

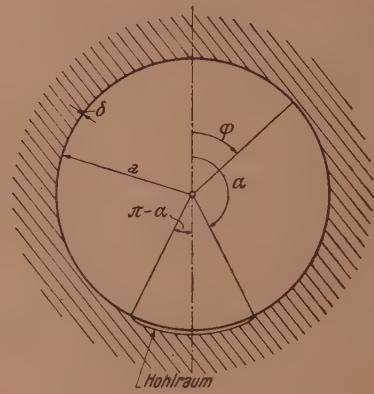


Abb. 2. Unvollständig umschlossenes Druckrohr.

mittelt worden ist, auch auf rechnerischem Wege bestimmt werden. Es sei hier auf die Arbeiten von Büchli¹ sowie von Mühlhofer² verwiesen, in welchen die inneren Kräfte des vom Rohr, Betonzyylinder und Gebirge gebildeten Verbundkörpers bereits unter Berücksichtigung des begrenzten Zugwiderstandes des Betons und des Gesteins bestimmt worden sind.

Nun sind die Voraussetzungen, die diesen Rechnungen zugrunde gelegt wurden, nicht immer in hinreichendem Maße erfüllt. Büchli hat in seiner Abhandlung bereits verschiedene Abweichungen von den idealisierenden Voraussetzungen bzw. einige Zusatzwirkungen in Betracht gezogen und ihren Einfluß auf die Spannungsverhältnisse ermittelt. So wurde beispielsweise das Schwinden des Betons und anderseits eine Abkühlung des Rohres gegenüber dem Betonzyylinder berücksichtigt. Auch wurden die vom Innendruck p_i verursachten Spannungen des Druckrohres für den Fall ermittelt, daß sich der Beton beim Abbinden und Erhärten vom Rohr gelöst hat und ein Zwischenraum um das Rohr entstanden ist. Unter den getroffenen Voraussetzungen ergaben sich in all diesen Fällen ebene, zur Rohrachse drehsymmetrische Verzerrungszustände, deren Berechnung daher keine Schwierigkeiten bot; zugleich blieben die bezüglichen Zusatzspannungen meist gering. Von weit größerem Einfluß

¹ J. Büchli: Zur Berechnung von Druckschächten. Schweiz. Bauztg. 77, 61, 73, 88 (1921).

² L. Mühlhofer: Die Berechnung kreisförmiger Druckschachtprofile unter Zugrundelegung eines elastisch nachgiebigen Gebirges. Ztschr. Österr. Ing.-u. Arch.-Ver. 13, 24—27, Heft 15, (1921).

sind aber einige Abweichungen von den Rechnungsvoraussetzungen, die eine Störung des rotationssymmetrischen Spannungs- und Verzerrungszustandes des Verbundkörpers verursachen, da sie zuweilen eine erhebliche örtliche Steigerung der Werkstoffanstrengung zur Folge haben. Dies gilt vor allem für Hohlraumbildungen zwischen Rohr und Betonumhüllung. Ihr Einfluß wird im folgenden untersucht.

2. Berechnungsgrundlagen.

Bei der Herstellung des Stampfbetonzyinders sackt der noch feuchte Beton ein; im schräg liegenden Druckschacht löst er sich hierbei vom First des Stollens und vom Unterteil des Rohres ab. Angenommen, der entstandene Hohlraum zwischen Rohr und Betonzyylinder sei nicht durch Auspressen mit flüssigem Zementmörtel geschlossen worden und das im Bereich (Abb. 2) $\varphi = 0$ bis $\pm \alpha$ satt vom Beton umschlossene Rohr liege im Bereich $\varphi = \pm (\alpha$ bis $\pi)$ vollkommen frei. Dieser Hohlraum erstrecke sich in Richtung der Rohrachse über eine Länge, die ein Vielfaches seiner Breite betrage. Wir nehmen für die Rechnung an, der Hohlraum sei wie das Rohr und der umgebende Betonzyylinder unendlich lang; das Gebirge bilde einen allseits unendlich ausgedehnten Körper. Das Rohr soll einen genau kreisförmigen Querschnitt besitzen, Wandstärke δ und Halbmesser a desselben seien konstant. Das Rohr werde einem konstanfen Innendruck p_i unterworfen. Der Verbundkörper befindet sich dann in einem ebenen Verzerrungszustande; seine Punkte sollen keine Verschiebungen in Richtung der Rohrachse ausführen können. Im Rohr treten dann in der Längsrichtung wirkende Normalspannungen σ_x auf, die gleich sind den μ -fachen Normalspannungen σ_φ der Umfangsrichtung; μ bedeutet hierbei die Querdehnungszahl des Rohrwerkstoffes. Alle Teile des Verbundkörpers — Rohr, Betonzyylinder, Gebirge — sollen innerhalb der in Frage kommenden Anstrengungsgrenzen dem Hookeschen Elastizitätsgesetz gehorchen.

Vom einwirkenden Rohrinnendruck p_i wird nun im Bereich $\varphi = 0$ bis $\pm \alpha$ der mit φ veränderliche Anteil p_a auf den Betonzyylinder übertragen. Das Rohr hat dort bloß den Druckanteil

$$p(\varphi) = p_i - p_a \quad (1)$$

aufzunehmen. Es wird nun die Annahme getroffen, daß der Außendruck p_a des Rohres an jeder Stelle verhältnisgleich ist der am selben Orte auftretenden Radialverschiebung w des Punktes der Rohrmittelfläche:

$$p_a = k w. \quad (2)$$

Die Verschiebungen w werden nach außen positiv gezählt; die Konstante k stellt die „Bettungsziffer“ dar. Es sei hervorgehoben, daß die Anwendung der Bettungsziffermethode hier insofern begründet ist, als in dem das Rohr umhüllenden Betonkörper und auch in der Gesteinshülle Zugrisse entstehen werden, die vorwiegend radial verlaufen müssen. Die Eindrückung w an beliebiger Stelle der inneren Leibung der Betonhülle wird dann hauptsächlich von dem am gleichen Orte wirksamen Außendruck p_a abhängen.

Das Rohr überträgt im vorliegenden Falle auch tangential gerichtete Kräfte auf den Betonzyylinder. Denn die Rohrpunkte verschieben sich in tangentialem Richtung und zufolge der Haftung und der Reibung werden die dem Rohr benachbarten Randpunkte des Betonkörpers, die bloß geringe Verschiebungen anstreben, zur Ausführung der gleichen Verschiebungen gezwungen. Diesem Zwang entspringen die Tangentialkräfte t , die allerdings nur eine beschränkte Größe erreichen können, die äußerstenfalls gleich ist der Haftfestigkeit des Betons am Stahlrohr, vermehrt um die Reibungskraft ϱp_a ; ϱ bedeutet den Reibungsbeiwert. Wir setzen für die Rechnung zunächst

voraus, daß diese möglichen Höchstwerte der Kräfte t von den Rechnungswerten nicht überschritten werden.

Die Stützkräfte t des Rohres beeinflussen dessen Spannungszustand im günstigen Sinne. Ihre schärfere Berechnung ist aber schon wegen der durch Rißbildungen verursachten Anisotropie des Hüllkörpers nicht möglich. Es ist nun naheliegend, auch hier die Bettungsziffermethode heranzuziehen und anzunehmen, die tangentialen Stützkräfte t des Rohres seien an jeder Stelle verhältnisgleich der am gleichen Orte zustande kommenden Tangentialverschiebung v des Rohrpunktes:

$$t = \bar{k} v; \quad (3)$$

\bar{k} bedeutet hierbei wieder eine Bettungsziffer. Die Verschiebungen v werden im Sinne wachsender φ positiv gezählt. Der Ansatz (3) entspricht der Symmetriebedingung $t = 0$ in $\varphi = 0$; denn v wird dort Null. Die Bettungsziffer \bar{k} könnte im günstigsten

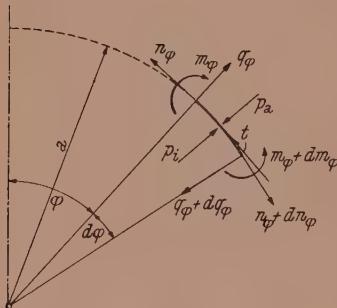


Abb. 3.

Falle die Größe der Bettungsziffer k von Gl. (2) erreichen: Betrachten wir, nämlich eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit einem kreisförmigen Loch, an dessen Wandung einmal gleichmäßig verteilte radiale Drücke p_a , das andere Mal gleichmäßig verteilte, gleichsinnig wirkende Tangentialkräfte t angreifen, so sind, wie sich leicht zeigen läßt, die Radialverschiebungen w der Lochwandpunkte zufolge der Kräfte p_a gleich den Tangentialverschiebungen v dieser Punkte zufolge der Kräfte t , falls $p_a = t$ ist. Nun werden aber die Risse im Hüllkörper, die teils schon im lastfreien Zustand vorhanden sind, teils erst unter der Belastung eintreten, den Verformungswiderstand herabsetzen,

und es wird daher $\bar{k} < k$ sein. Im Falle starker Rißbildung könnte sich $\bar{k} \approx 0$ ergeben; dieser Fall wird praktisch auch eintreten, wenn die entstehenden Stützkräfte t ihre möglichen Höchstwerte örtlich überschreiten und daher ein Gleiten des Rohres zustande kommt. In Anbetracht der Unsicherheit, die jeder zahlenmäßigen Einschätzung der Bettungsziffer \bar{k} anhaftet, werden für \bar{k} Grenzwerte \bar{k}_{\max} und \bar{k}_{\min} in Rechnung gestellt. Auf Grund vorstehender Überlegungen wird hierbei $\bar{k}_{\max} = \frac{1}{2} k$ und $\bar{k}_{\min} = 0$ angenommen. Es ist zu erwarten, daß in dieser Weise eine Eingrenzung des wirklich auftretenden Spannungszustandes erreicht werden kann.

Die Fälle $\bar{k} \neq 0$ und $\bar{k} = 0$ müssen getrennt behandelt werden.

3. Behandlung des Falles $\bar{k} \neq 0$.

a) Rohrteil $\varphi = 0$ bis $\pm \alpha$.

In Abb. 3 ist ein Element dieses Rohrabschnittes dargestellt, an dem die auf die Einheit der Rohrinnentfläche bezogenen Kräfte $p = p_i - p_a = p_i - k w$ und $t = \bar{k} v$ angreifen. Längs der Schnitte φ und $\varphi + d\varphi$ werden vom umgebenden Rohrwerkstoff auf das Element die Normalkräfte n_φ und $n_\varphi + dn_\varphi$, die Querkräfte q_φ und $q_\varphi + dq_\varphi$ und die Biegungsmomente m_φ und $m_\varphi + dm_\varphi$ ausgeübt. An den Schnittflächen x und $x + dx$ greifen die Normalkräfte n_x und die Biegungsmomente m_x an; alle Schnittgrößen n , q , m sind auf die Einheit der Schnittlänge bezogen und in Abb. 3 mit positivem Wirkungssinn abgetragen. Gemäß den getroffenen Voraussetzungen gelten die Beziehungen

$$n_x = \mu n_\varphi, \quad m_x = \mu m_\varphi.$$

Wir schreiben nun die Gleichgewichtsbedingungen für das Schalenelement an.

Die Bedingung für das Gleichgewicht gegen Verschieben in Richtung der Ringtangente lautet mit Bezug auf Abb. 3:

$$dn_\varphi - q_\varphi d\varphi - t a d\varphi = 0$$

und mit (3) folgt hieraus

$$\frac{dn_\varphi}{d\varphi} = q_\varphi + \bar{k} a v. \quad (4)$$

Das Gleichgewicht gegen Verschieben in Richtung der Flächennormalen erfordert das Bestehen der Beziehung

$$p a d\varphi - dq_\varphi - n_\varphi d\varphi = 0,$$

die mit (1) und (2) geschrieben werden kann:

$$p_i a - k a w - \frac{dq_\varphi}{d\varphi} - n_\varphi = 0. \quad (5)$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht gegen Drehen um die durch den Elementmittelpunkt gehende Erzeugende lautet

$$\frac{dm_\varphi}{d\varphi} = a q_\varphi$$

oder

$$q_\varphi = \frac{1}{a} \frac{dm_\varphi}{d\varphi}. \quad (6)$$

Die Beziehungen zwischen den Schnittgrößen n_φ und m_φ und den Verschiebungskomponenten u, v, w der Punkte der Rohrmittelfläche entnehmen wir dem Schrifttum.³ Voraussetzungsgemäß sind alle Verschiebungen u Null und es entfallen die Ableitungen nach x . Wir erhalten daher

$$n_\varphi = \frac{D}{a} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right) + \frac{K}{a^3} \left(w + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right), \quad (7)$$

$$m_\varphi = \frac{K}{a^2} \left(w + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right), \quad (8)$$

wobei

$$D = \frac{E\delta}{1-\mu^2}, \quad K = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad (9)$$

die „Dehnsteifigkeit“ bzw. die „Biegesteifigkeit“ des Rohres bedeuten.

Mit Hilfe von (6) eliminieren wir die Querkraft q_φ aus den Beziehungen (4) und (5); mit Benützung von (7) und (8) entsteht so

$$\frac{dn_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{a} \frac{dm_\varphi}{d\varphi} + \bar{k} a v \quad (4a)$$

und hieraus folgt

$$v = \frac{1}{\bar{k} a} \left(\frac{dn_\varphi}{d\varphi} - \frac{1}{a} \frac{dm_\varphi}{d\varphi} \right). \quad (4b)$$

Aus (5) ergibt sich

$$n_\varphi = p_i a - k a w - \frac{1}{a} \frac{d^2 m_\varphi}{d\varphi^2} \quad (5a)$$

und mit (8) entsteht hieraus

$$n_\varphi = p_i a - k a w - \frac{K}{a^3} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{d^4 w}{d\varphi^4} \right). \quad (5b)$$

Aus (4b) folgt

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{\bar{k} a} \left(\frac{d^2 n_\varphi}{d\varphi^2} - \frac{1}{a} \frac{d^2 m_\varphi}{d\varphi^2} \right)$$

und mit (8) und (5b) erhält man weiterhin

$$\frac{dv}{d\varphi} = - \frac{1}{\bar{k}} \left[\frac{K}{a^4} \left(\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) + k \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right]. \quad (10)$$

³ S. z. B.: K. Girkmann: Flächentragwerke, S. 389, Gl. (966/2) und (966/6). Wien, Springer-Verlag. 1946.

Diesen Ausdruck führen wir in (7) ein:

$$n_\varphi = -\frac{D}{a} \left[\frac{K}{a^4 \bar{k}} \left(\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) + \frac{k}{\bar{k}} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - w \right] + \frac{K}{a^3} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right). \quad (11)$$

Dieses Ergebnis gleichgesetzt dem Ausdruck (5b) für n_φ , entsteht nach Zusammenfassen und Ordnen der Glieder die Differentialgleichung für die Radialverschiebungen w der Punkte der Rohrmitteflächen im Bereich $\varphi = 0$ bis $\pm \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 w}{d\varphi^6} + \left(2 - \frac{\bar{k} a^2}{D} \right) \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \left(1 - \frac{2 \bar{k} a^2}{D} + \frac{k a^4}{K} \right) \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \\ - \frac{\bar{k} a^2}{D} \left(1 + \frac{a^2 D}{K} + \frac{k a^4}{K} \right) w = -p_i \frac{\bar{k} a^6}{DK}. \end{aligned} \quad (12)$$

Die vollständige Lösung der Gl. (12) setzen wir zusammen aus dem partikulären Integral

$$w' = \frac{p_i a^4}{K + k a^4 + a^2 D} \quad (13)$$

und aus der Lösung w'' der homogenen Differentialgleichung. Zur Ermittlung der letzteren bilden wir den Ansatz

$$w'' = A e^{z \varphi},$$

mit dem die homogene Differentialgleichung in die charakteristische Gleichung

$$z^6 + \left(2 - \frac{k a^2}{D} \right) z^4 + \left(1 - \frac{2 \bar{k} a^2}{D} + \frac{k a^4}{K} \right) z^2 - \frac{\bar{k} a^2}{D} \left(1 + \frac{a^2 D}{K} + \frac{k a^4}{K} \right) = 0 \quad (14)$$

übergeht. Nach Ermittlung der sechs Wurzeln z_1 bis z_6 erhalten wir als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$w'' = \sum_n A_n e^{z_n \varphi}, \quad n = 1, 2, \dots, 6.$$

Nun ergeben sich für den vorliegenden Anwendungsfall die Wurzeln z_n der Gl. (14) in der Form

$$z_{1,2} = \pm (\mu_1 + i \mu_2), \quad z_{3,4} = \pm (\mu_1 - i \mu_2), \quad z_{5,6} = \pm \mu_3, \quad (15)$$

wobei μ_1 , μ_2 und μ_3 bestimmte reelle Zahlenwerte bedeuten. Unter Beachtung des Ergebnisses (13) kann somit die allgemeine Lösung $w = w' + w''$ der vollständigen Differentialgleichung (12) geschrieben werden

$$\begin{aligned} w = e^{\mu_1 \varphi} (A_1' \sin \mu_2 \varphi + A_2' \cos \mu_2 \varphi) + e^{-\mu_1 \varphi} (A_3' \sin \mu_2 \varphi + A_4' \cos \mu_2 \varphi) + \\ + A_5' e^{\mu_3 \varphi} + A_6' e^{-\mu_3 \varphi} + \frac{p_i a^4}{K + k a^4 + a^2 D}. \end{aligned} \quad (16)$$

Die sechs Integrationskonstanten A_1' , A_2' , ..., A_6' sind aus den Randbedingungen zu ermitteln.

Nun muß w eine gerade Funktion von φ sein; da in $\varphi = 0$ keine Unstetigkeit bestehen kann, gelten daher die Beziehungen

$$A_3' = -A_1', \quad A_4' = A_2', \quad A_6' = A_5'. \quad (17)$$

Damit erhalten wir aus (16)

$$\begin{aligned} w = 2 (A_1' \operatorname{Sin} \mu_1 \varphi \sin \mu_2 \varphi + A_2' \operatorname{Cos} \mu_1 \varphi \cos \mu_2 \varphi) + 2 A_5' \operatorname{Cos} \mu_3 \varphi + \\ + \frac{p_i a^4}{K + k a^4 + a^2 D}. \end{aligned} \quad (16a)$$

Um das Rechnen mit großen Zahlen zu vermeiden (für den vorliegenden Anwendungsfall ist $\mu_1 \approx 7$ und die Hyperbelfunktionen erreichen gegen $\varphi = \alpha$ hin große Werte), werden A_1' und A_2' mit $\operatorname{Cos} \mu_1 \alpha$ zu neuen Konstanten A_1 und A_2 zusammengefaßt:

$$A_1 = 2 A_1' \operatorname{Cos} \mu_1 \alpha \doteq 2 A' \operatorname{Sin} \mu_1 \alpha \doteq A_1' e^{\mu_1 \alpha},$$

$$A_2 = 2 A_2' \operatorname{Cos} \mu_1 \alpha \doteq A_2' e^{\mu_1 \alpha};$$

es ist dann

$$\frac{\operatorname{Sin} \mu_1 \varphi}{\operatorname{Cos} \mu_1 \alpha} \doteq \frac{e^{\mu_1 \varphi} - e^{-\mu_1 \varphi}}{e^{\mu_1 \alpha}} \doteq e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)}, \quad \frac{\operatorname{Cos} \mu_1 \varphi}{\operatorname{Cos} \mu_1 \alpha} \doteq e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)}.$$

Mit dieser erlaubten Vereinfachung und mit Einführung von $A_5 = 2 A_5'$ folgt aus (16a):

$$w = e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} (A_1 \sin \mu_2 \varphi + A_2 \cos \mu_2 \varphi) + A_5 \operatorname{Cos} \mu_3 \varphi + \frac{p_i a^4}{K + k a^4 + a^2 D}. \quad (18)$$

Aus (18) bilden wir die Ableitungen von w :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} &= e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} [A_1 (\mu_1 \sin \mu_2 \varphi + \mu_2 \cos \mu_2 \varphi) + A_2 (\mu_1 \cos \mu_2 \varphi - \mu_2 \sin \mu_2 \varphi)] + \\ &\quad + \mu_3 A_5 \operatorname{Sin} \mu_3 \varphi, \\ \frac{d^2 w}{d\varphi^2} &= e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} \{A_1 [(\mu_1^2 - \mu_2^2) \sin \mu_2 \varphi + 2 \mu_1 \mu_2 \cos \mu_2 \varphi] + \\ &\quad + A_2 [(\mu_1^2 - \mu_2^2) \cos \mu_2 \varphi - 2 \mu_1 \mu_2 \sin \mu_2 \varphi] + \mu_3^2 A_5 \operatorname{Cos} \mu_3 \varphi, \\ \frac{d^3 w}{d\varphi^3} &= e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} \{A_1 [\mu_1 (\mu_1^2 - 3 \mu_2^2) \sin \mu_2 \varphi - \mu_2 (\mu_2^2 - 3 \mu_1^2) \cos \mu_2 \varphi] + \\ &\quad + A_2 [\mu_1 (\mu_1^2 - 3 \mu_2^2) \cos \mu_2 \varphi + \mu_2 (\mu_2^2 - 3 \mu_1^2) \sin \mu_2 \varphi] + \mu_3^3 A_5 \operatorname{Sin} \mu_3 \varphi, \\ \frac{d^4 w}{d\varphi^4} &= e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} \{A_1 [(\mu_1^4 - 6 \mu_1^2 \mu_2^2 + \mu_2^4) \sin \mu_2 \varphi + 4 \mu_1 \mu_2 (\mu_1^2 - \mu_2^2) \cos \mu_2 \varphi] + \\ &\quad + A_2 [(\mu_1^4 - 6 \mu_1^2 \mu_2^2 + \mu_2^4) \cos \mu_2 \varphi - 4 \mu_1 \mu_2 (\mu_1^2 - \mu_2^2) \sin \mu_2 \varphi] + \mu_3^4 A_5 \operatorname{Cos} \mu_3 \varphi, \\ \frac{d^5 w}{d\varphi^5} &= e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} \{A_1 [(\mu_1^4 - 10 \mu_1^2 \mu_2^2 + 5 \mu_2^4) \mu_1 \sin \mu_2 \varphi + (5 \mu_1^4 - 10 \mu_1^2 \mu_2^2 + \\ &\quad + \mu_2^4) \mu_2 \cos \mu_2 \varphi] + A_2 [(\mu_1^4 - 10 \mu_1^2 \mu_2^2 + 5 \mu_2^4) \mu_1 \cos \mu_2 \varphi - \\ &\quad - (5 \mu_1^4 - 10 \mu_1^2 \mu_2^2 + \mu_2^4) \mu_2 \sin \mu_2 \varphi] + \mu_3^5 A_5 \operatorname{Sin} \mu_3 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Durch Integration der Gl. (10) erhalten wir

$$v = -\frac{K}{a^4 k} \left[\frac{d^5 w}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \left(1 + \frac{a^4 k}{K} \right) \frac{dw}{d\varphi} \right] + A_7. \quad (20)$$

Nun ist w eine gerade Funktion von φ und in $\varphi = 0$ müssen alle ungeraden Ableitungen von w Null sein; da dort auch $v = 0$ ist, gilt somit

$$A_7 = 0. \quad (21)$$

Führen wir in (20) für die Ableitungen von w die Ausdrücke (19) ein, so entsteht

$$\begin{aligned} v = -\frac{K}{a^4 k} &\left\{ A_1 e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} \left[\left((1 + \mu_1^2)^2 - \mu_2^2 (6 + 10 \mu_1^2 - 5 \mu_2^2) + \frac{a^4 k}{K} \right) \mu_1 \sin \mu_2 \varphi + \right. \right. \\ &\quad + \left. \left. \left((1 - \mu_2^2)^2 + \mu_1^2 (6 - 10 \mu_2^2 + 5 \mu_1^2) + \frac{a^4 k}{K} \right) \mu_2 \cos \mu_2 \varphi \right] + \right. \\ &\quad + A_2 e^{-\mu_1(\alpha - \varphi)} \left[\left((1 + \mu_1^2)^2 - \mu_2^2 (6 + 10 \mu_1^2 - 5 \mu_2^2) + \frac{a^4 k}{K} \right) \mu_1 \cos \mu_2 \varphi - \right. \\ &\quad - \left. \left. \left((1 - \mu_2^2)^2 + \mu_1^2 (6 - 10 \mu_2^2 + 5 \mu_1^2) + \frac{a^4 k}{K} \right) \mu_2 \sin \mu_2 \varphi \right] + \right. \\ &\quad \left. + A_5 \left((1 + \mu_3^2)^2 + \frac{a^4 k}{K} \right) \mu_3 \operatorname{Sin} \mu_3 \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (20a)$$

Aus (5b) ermitteln wir noch die Ringkraft n_φ ; für die Verschiebungen w und ihre Ableitungen die Ausdrücke (18) und (19) eingesetzt, entsteht

$$\begin{aligned}
n_\varphi = & -\frac{K}{a^3} \left\{ A_1 e^{-\mu_1(\alpha-\varphi)} \left[\left(\mu_1^4 - 6\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^4 + \mu_1^2 - \mu_2^2 + \frac{a^4 k}{K} \right) \sin \mu_2 \varphi + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 4\mu_1\mu_2 (\mu_1^2 - \mu_2^2 + \frac{1}{2}) \cos \mu_2 \varphi \right] + \right. \\
& \quad + A_2 e^{-\mu_1(\alpha-\varphi)} \left[\left(\mu_1^4 - 6\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^4 + \mu_1^2 - \mu_2^2 + \frac{a^4 k}{K} \right) \cos \mu_2 \varphi - \right. \\
& \quad \left. \left. - 4\mu_1\mu_2 (\mu_1^2 - \mu_2^2 + \frac{1}{2}) \sin \mu_2 \varphi \right] + \right. \\
& \quad \left. + A_5 \left[\mu_3^2 (1 + \mu_3^2) + \frac{a^4 k}{K} \right] \operatorname{Cos} \mu_3 \varphi \right\} + p_i a \frac{K + a^2 D}{K + a^4 k + a^2 D}. \quad (22)
\end{aligned}$$

b) Rohrteil: $\varphi = \pm (\alpha \text{ bis } \pi)$.

Für diesen Rohrabschnitt ist $k = \bar{k} = 0$ und die Rohrbelastung p besitzt die Größe $\bar{p} = p_i$. Die Differentialgleichung (12) lautet dann

$$\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} = 0; \quad (23)$$

sie besitzt die charakteristische Gleichung

$$z^6 + 2z^4 + z^2 = 0,$$

die je zwei Wurzeln $+i, -i$ und 0 liefert. Die allgemeine Lösung der Gl. (23) kann daher in der Form angeschrieben werden:

$$w = B_1 \sin \varphi + B_2 \varphi \sin \varphi + B_3 \cos \varphi + B_4 \varphi \cos \varphi + B_5 + B_6 \varphi.$$

Hinsichtlich $\varphi = \pi$ besteht Symmetrie und an dieser Stelle φ müssen daher alle ungeraden Ableitungen von w verschwinden. Auf Grund dieser Bedingung müssen die Integrationskonstanten B den folgenden Beziehungen genügen:

$$B_1 + \pi B_2 = 0, \quad B_4 = B_6 = 0.$$

Damit kann die Lösung für die Biegefläche geschrieben werden

$$w = B_1 \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \sin \varphi + B_3 \cos \varphi + B_5. \quad (24)$$

Die zugehörigen Ableitungen lauten:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dw}{d\varphi} &= B_1 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \cos \varphi - \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right] - B_3 \sin \varphi, \\
\frac{d^2 w}{d\varphi^2} &= -B_1 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \sin \varphi + \frac{2}{\pi} \cos \varphi \right] - B_3 \cos \varphi, \\
\frac{d^3 w}{d\varphi^3} &= -B_1 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \cos \varphi - \frac{3}{\pi} \sin \varphi \right] + B_3 \sin \varphi.
\end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Den Ausdruck für n_φ beschaffen wir uns unmittelbar aus (5b); mit $k = 0$ wird

$$n_\varphi = p_i a - \frac{K}{a^3} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{d^4 w}{d\varphi^4} \right);$$

unter Beachtung der aus (24) folgenden Beziehung

$$\frac{d^4 w}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = B_5$$

entsteht weiterhin

$$n_\varphi = p_i a - \frac{K}{a^3} \left(B_5 - w - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right). \quad (26)$$

Die Tangentialverschiebung v ermitteln wir sodann aus (7): mit (26) folgt

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{a}{D} \left(p_i a - \frac{K}{a^3} B_5 \right) - w$$

und mit (24) und (25) ergibt sich weiterhin

$$\frac{dv}{d\varphi} = -B_1 \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \sin \varphi - B_3 \cos \varphi - B_5 \left(1 + \frac{K}{a^2 D} \right) + \frac{p_i a^2}{D}.$$

Die Integration liefert

$$v = B_1 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right] - B_3 \sin \varphi + \left[\frac{p_i a^2}{D} - B_5 \left(1 + \frac{K}{a^2 D} \right) \right] \varphi + B_7.$$

Die Integrationskonstante B_7 ist aus der Bedingung $v = 0$ in $\varphi = \pi$ zu berechnen; unter gleichzeitiger Beachtung von

$$1 + \frac{K}{a^2 D} = 1 + \frac{\delta^2}{12 a^2} \approx 1$$

folgt schließlich

$$v = B_1 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right] - B_3 \sin \varphi + \left(B_5 - \frac{p_i a^2}{D} \right) (\pi - \varphi). \quad (27)$$

c) Aufstellung der Randbedingungen.

In $\varphi = \pm \alpha$ stoßen die elastischen Flächen der beiden, unter a) und b) getrennt behandelten Rohrteile zusammen und müssen dort stetig aneinanderschließen. Kennzeichnen wir die aus den Gl. (18), (19), (20a) und (22) mit $\varphi = \alpha$ sich ergebenden Randwerte der Verschiebungskomponenten, ihrer Ableitungen sowie der Schnittgrößen des oberen Rohrteiles durch den Zeiger Eins, die für den gleichen Ort aus den Gl. (24) bis (27) folgenden Randwerte der bezüglichen Größen des unteren Rohrteiles durch den Zeiger Zwei, so lassen sich die Übergangsbedingungen wie folgt anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_2, & \frac{dw_1}{d\varphi} &= \frac{dw_2}{d\varphi}, & m_{\varphi,1} &= m_{\varphi,2} \left(\text{also auch } \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} = \frac{d^2 w_2}{d\varphi^2} \right), \\ q_{\varphi,1} &= q_{\varphi,2} \left(\text{also auch } \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} = \frac{d^3 w_2}{d\varphi^3} \right), & n_{\varphi,1} &= n_{\varphi,2}, & v_1 &= v_2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Diese sechs Gleichungen, aus welchen die sechs Integrationskonstanten A_1 , A_2 und A_5 sowie B_1 , B_3 und B_5 zu berechnen sind, stellen aber ein sehr fehlerempfindliches System dar. Eine sehr wesentliche Verbesserung wird nun erzielt, wenn man zunächst die drei Konstanten B eliminiert, so daß nur drei Gleichungen mit den drei Unbekannten A verbleiben. Zu diesem Zwecke ersetzen wir vorerst die Gl. (28) durch die folgenden gleichwertigen Beziehungen

$$\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} = \frac{dw_2}{d\varphi} + \frac{d^3 w_2}{d\varphi^3}, \quad w_1 + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} = w_2 + \frac{d^2 w_2}{d\varphi^2}, \quad \frac{dw_1}{d\varphi} = \frac{dw_2}{d\varphi}; \quad (29)$$

$$v_1 - \frac{dw_1}{d\varphi} = v_2 - \frac{dw_2}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} = \frac{d^2 w_2}{d\varphi^2}, \quad n_{\varphi,1} = n_{\varphi,2}. \quad (30)$$

Und nun führen wir für die auf den rechten Gleichungsseiten stehenden Verschiebungen, Verschiebungsableitungen und Schnittgrößen des unteren Rohrteiles die bezüglichen, mit $\varphi = \alpha$ aus den Gl. (24) bis (27) folgenden Randwerte ein. Wir können dann die Konstanten B durch die auf den linken Gleichungsseiten verbliebenen Verschiebungs- und Schnittgrößen des oberen Rohrteiles ausdrücken:

$$B_1 = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} \right), \quad (31/1)$$

$$B_3 = \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ - \frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{1}{2} [(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \alpha - 1] \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} \right) \right\}, \quad (31/2)$$

$$B_5 = w_1 + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} \right), \quad (31/3)$$

Die vorstehenden Ergebnisse in die Gl. (30) eingesetzt, erhalten wir die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Konstanten A :

$$\begin{aligned} - \left(v_1 - \frac{dw_1}{d\varphi} \right) + (\pi - \alpha) \left(w_1 + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} \right) + [1 + (\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \alpha] \left[\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} \right] - \\ - (\pi - \alpha) \frac{p_i a^2}{D} = 0, \end{aligned} \quad (32/1)$$

$$\frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \alpha}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \alpha}{\sin^2 \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} = 0, \quad (32/2)$$

$$n_{\varphi,1} + \frac{K}{a^3} \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} \right) - p_i a = 0. \quad (32/3)$$

Führen wir für die Randwerte der Größen des oberen Rohrteiles die bezüglichen, mit $\varphi = \alpha$ aus den Gl. (18), (19), (20a) und (22) folgenden Ausdrücke in die Gl. (32) ein, so erhalten wir die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten A . Ihre Aufstellung wird am besten erst mit den speziellen Zahlenwerten des jeweiligen Anwendungsfalles erfolgen. Nach der Berechnung der Konstanten A werden die drei Konstanten B aus den Gl. (31) ermittelt, und damit sind wir in der Lage, den Spannungs- und Verzerrungszustand des Druckrohrs zu bestimmen.

4. Behandlung des Falles $\bar{k} = 0$.

Die Differentialgleichung (12) lautet dann

$$\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \left(1 + \frac{a^4 k}{K} \right) \frac{d^2 w}{d\varphi^2} = 0. \quad (33)$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$z^6 + 2 z^4 + \left(1 + \frac{a^4 k}{K} \right) z^2 = 0$$

besitzt die Wurzeln

$$z_{1,2} = \mu_1 \pm \mu_2 i, \quad z_{3,4} = -\mu_1 \pm \mu_2 i, \quad z_5 = z_6 = 0, \quad (34)$$

wobei

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\kappa} - 1)}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\kappa} + 1)} \quad (35)$$

und

$$\kappa = 1 + \frac{a^4 k}{K}. \quad (36)$$

Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung (33):

$$w = e^{\mu_1 \varphi} (C_1' \sin \mu_2 \varphi + C_2' \cos \mu_2 \varphi) + e^{-\mu_1 \varphi} (C_3' \sin \mu_2 \varphi + C_4' \cos \mu_2 \varphi) + C_5 + C_6 \varphi.$$

Nun muß w wieder eine gerade Funktion von φ sein, und es gilt daher

$$C_3' = -C_1', \quad C_4' = C_2', \quad C_6 = 0.$$

Um das Rechnen mit großen Zahlen zu vermeiden, verfahren wir wie im Falle $\bar{k} \neq 0$ und gelangen damit zur Lösungsform

$$w = e^{-\mu_1 (\alpha - \varphi)} (C_1 \sin \mu_2 \varphi + C_2 \cos \mu_2 \varphi) + C_5; \quad (37)$$

die drei Integrationskonstanten werden wieder aus den Übergangsbedingungen für $\varphi = \alpha$ zu berechnen sein. Aus (37) folgen die Ableitungen von w , die wir mit Benützung von (35), (36) schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} &= e^{-\mu_1 (\alpha - \varphi)} [C_1 (\mu_1 \sin \mu_2 \varphi + \mu_2 \cos \mu_2 \varphi) + C_2 (\mu_1 \cos \mu_2 \varphi - \mu_2 \sin \mu_2 \varphi)], \\ \frac{d^2 w}{d\varphi^2} &= e^{-\mu_1 (\alpha - \varphi)} [C_1 (-\sin \mu_2 \varphi + 2\mu_1 \mu_2 \cos \mu_2 \varphi) - C_2 (\cos \mu_2 \varphi + 2\mu_1 \mu_2 \sin \mu_2 \varphi)], \\ \frac{d^3 w}{d\varphi^3} &= e^{-\mu_1 (\alpha - \varphi)} \{C_1 [-\mu_1 (\sqrt{\kappa} + 2) \sin \mu_2 \varphi + \mu_2 (\sqrt{\kappa} - 2) \cos \mu_2 \varphi] + \\ &\quad + C_2 [-\mu_1 (\sqrt{\kappa} + 2) \cos \mu_2 \varphi - \mu_2 (\sqrt{\kappa} - 2) \sin \mu_2 \varphi]\}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Wir benötigen noch die Ausdrücke für die Ringkraft n_φ und für die Tangentialverschiebungen v . Aus (5b) erhalten wir unmittelbar

$$n_\varphi = p_i a - k a w - \frac{K}{a^3} \left(\frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{d^4 w}{d\varphi^4} \right).$$

Mit Benützung der aus (37) folgenden Beziehung

$$\frac{d^4 w}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \kappa w = \kappa C_5$$

kann für n_φ geschrieben werden

$$n_\varphi = p_i a - \frac{K}{a^3} \left(\kappa C_5 - w - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right). \quad (39)$$

Die Tangentialverschiebung v ermitteln wir aus (7):

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{a}{D} \left[n_\varphi - \frac{K}{a^3} \left(w + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) \right] - w.$$

Mit (39) folgt zunächst:

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{a}{D} \left(p_i a - \frac{K}{a^3} \kappa C_5 \right) - w$$

und die Integration ergibt

$$v = - \int w d\varphi + \frac{a}{D} \left(p_i a - \frac{K}{a^3} \kappa C_5 \right) \varphi + C_7.$$

Aus Symmetriegründen muß $v = 0$ in $\varphi = 0$ sein. Da w eine gerade Funktion von φ ist, die in $\varphi = 0$ stetig verläuft, verschwindet $\int w d\varphi$ in $\varphi = 0$, und es muß daher

$$C_7 = 0$$

sein. Für w den Ausdruck (37) eingesetzt und die Integration ausgeführt, entsteht schließlich

$$v = - \frac{1}{V\kappa} e^{-\mu_1(\alpha-\varphi)} [C_1 (\mu_1 \sin \mu_2 \varphi - \mu_2 \cos \mu_2 \varphi) + C_2 (\mu_1 \cos \mu_2 \varphi + \mu_2 \sin \mu_2 \varphi)] - C_5 \left(1 + \frac{K}{a^2 D} \kappa \right) \varphi + \frac{p_i a^2}{D} \varphi. \quad (40)$$

Für den unteren Rohrteil $\varphi = \pm (\alpha \div \pi)$ gelten wieder die entwickelten Beziehungen (24) ÷ (27).

Um die Konstanten des unteren Rohrteiles gleich eliminieren zu können, setzen wir die Übergangsbedingungen (28) wie folgt an:

$$\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} = \frac{dw_2}{d\varphi} + \frac{d^2 w_2}{d\varphi^2}, \quad \frac{dw_1}{d\varphi} = \frac{dw_2}{d\varphi}. \quad (41)$$

$$n_{\varphi, 1} = n_{\varphi, 2}, \quad (42)$$

$$w_1 + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} = w_2 + \frac{d^2 w_2}{d\varphi^2}, \quad v_1 - \frac{dw_1}{d\varphi} = v_2 - \frac{dw_2}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} = \frac{d^2 w_2}{d\varphi^2}. \quad (43)$$

Hierbei kennzeichnen die Zeiger Eins bzw. Zwei wieder für $\varphi = \alpha$ berechnete Randwerte von Größen des oberen bzw. unteren Rohrteiles.

Führen wir in die erste der Gl. (41) wieder die aus (25) sich mit $\varphi = \alpha$ ergebenden Randwerte $\frac{dw_2}{d\varphi}$ und $\frac{d^2 w_2}{d\varphi^2}$ von $\frac{dw}{d\varphi}$ und $\frac{d^2 w}{d\varphi^2}$ des unteren Rohrteiles ein, so erhalten wir

$$B_1 = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} \right). \quad (44)$$

Mit Hilfe von (25) und mit Benützung von (44) folgt aus der zweiten Gl. (41)

$$B_3 = \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ - \frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{1}{2} [(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \alpha - 1] \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} \right) \right\}. \quad (45)$$

Wie aus den Gl. (26) und (39) zu ersehen ist, wird der Bedingung (42) mit

$$B_5 = \kappa C_5 \quad (46)$$

entsprochen. Mit Hilfe der Ergebnisse (44) ÷ (46) und mit Benützung der Gl. (24) ÷ (27) werden die auf den rechten Seiten der Beziehungen (43) stehenden Randwerte des unteren Rohrteiles eliminiert. Wir erhalten so die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} w_1 + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} &= - \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^3} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \kappa C_5, \\ v_1 - \frac{dw_1}{d\varphi} &= (\pi - \alpha) \left(w_1 + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} \right) + [(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \alpha + 1] \left(\frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{d^2 w_1}{d\varphi^3} \right) - \\ &\quad - (\pi - \alpha) \frac{p_i a^2}{D}, \\ \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \alpha}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{dw_1}{d\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \alpha}{\sin^2 \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Führen wir nun in die Gl. (47) die mit $\varphi = \alpha$ aus (37), (38) und (40) gebildeten Randwerte des oberen Rohrteiles ein, so erhalten wir die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten C_1 , C_2 und C_5 ; nach deren Berechnung sind die Konstanten B_1 , B_3 und B_5 aus (44) bis (46) zu ermitteln. Damit können die Verschiebungskomponenten und die Schnittgrößen des Rohres berechnet werden. Im besonderen folgen die Radialverschiebungen w des oberen Rohrteiles aus der Gl. (37); nach ihrer Ermittlung werden die Rohraußendrücke $p_a = k w$ erhalten. Die Biegmomente werden aus (8) berechnet. Mit (37), (38) bzw. (24), (25) erhält man

$$\left. \begin{aligned} m_\varphi &= \frac{K}{a^2} [2 \mu_1 \mu_2 e^{-\mu_1(\alpha-\varphi)} (C_1 \cos \mu_2 \varphi - C_2 \sin \mu_2 \varphi) + C_5], \text{ für } \varphi = 0 \text{ bis } \pm \alpha, \\ m_\varphi &= \frac{K}{a^2} \left(-\frac{2}{\pi} B_1 \cos \varphi + B_5 \right), \quad \text{für } \varphi = \pm (\alpha \text{ bis } \pi). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

5. Zahlenbeispiel.

Es sei $a = 90 \text{ cm}$, $\delta = 2.45 \text{ cm}$, $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 0.3$, $k = 440 \text{ kg/cm}^3$, $\alpha = 158^\circ$, $p_i = 42 \text{ kg/cm}^2$.

Damit folgt aus (9): $D = 5653840 \text{ kg/cm}$, $K = 2828100 \text{ kg cm}$.

Fall I: $\bar{k} = 220 \text{ kg/cm}^3$.

Die Gl. (14) lautet

$$z^6 + 1.684816 z^4 + 10208.0674 z^2 - 8321.46375 = 0.$$

Sie liefert die Wurzeln

$$z_{1,2} = \pm (7.06383 + 7.15175 i), \quad z_{3,4} = \pm (7.06383 - 7.15175 i),$$

$$z_{5,6} = \pm 0.902774.$$

Es ist somit $\mu_1 = 7.06383$, $\mu_2 = 7.15175$, $\mu_3 = 0.902774$. Mit $\varphi = \alpha = 158^\circ$ ergeben die Gl. (18), (19), (20a) und (22) die folgenden Randwerte für den oberen Rohrteil:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.76577 A_1 + 0.64310 A_2 + 6.06908 A_5 + 0.03690531, \\ \frac{dw_1}{d\varphi} &= 9.99990 A_1 - 0.92353 A_2 + 5.40413 A_5, \\ \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} &= 63.39769 A_1 - 78.02957 A_2 + 4.94630 A_5, \\ \frac{d^3 w_1}{d\varphi^3} &= -49.83843 A_1 - 1077.9741 A_2 + 4.40438 A_5, \end{aligned}$$

$$v_1 = -0.00752727 A_1 - 0.0993880 A_2 - 10.81174 A_5,$$

$$n_{\varphi,1} = 378.9218 A_1 - 448.0056 A_2 - 240.370383 A_5 + 2318.55034.$$

Diese Ergebnisse in die Gl. (32) eingesetzt, entstehen die Beziehungen

$$32.66664 A_1 - 84.10141 A_2 + 20.93243 A_5 = 0.00893357,$$

$$82.94688 A_1 - 221.17029 A_2 + 19.60235 A_5 = 0,$$

$$76.14425 A_1 + 991.13282 A_2 - 24.046456 A_5 = 146.144966.$$

Ihre Auflösung ergibt

$$A_1 = +0.0661772,$$

$$A_2 = +0.0243881,$$

$$A_5 = -0.00486284,$$

und damit folgt aus den Gl. (31)

$$B_1 = -121.58597,$$

$$B_3 = +73.84635,$$

$$B_5 = +74.10966.$$

Damit wurden berechnet:

Aus (18) die Verschiebungen w des oberen Rohrteiles und weiterhin die radialen Rohraußendrücke $p_a = k w$,

aus (20) die Verschiebungen v und weiterhin die tangentiaLEN Stützkräfte $t = \bar{k} v$;

aus (8) mit Hilfe von (18), (19) bzw. (24), (25) die Momente m_φ des oberen bzw. unteren Rohrteiles,

aus (22) bzw. (26) die Normalkräfte n_φ für die Orte $\varphi = 0, \alpha$ und π .

Die Ergebnisse sind in Abb. 4, rechte Hälfte, abgetragen.

Fall II: $\bar{k} = 0$.

Aus (36) folgt

$$\kappa = 10208.708$$

und damit aus (35)

$$\mu_1 = 7.07242, \quad \mu_2 = 7.14276.$$

Nun wurden mit $\varphi = \alpha = 158^\circ$ aus (37), (38) und (40) die Randwerte des oberen Rohrteiles berechnet:

$$w_1 = 0.74455 C_1 + 0.66757 C_2 + C_5,$$

$$\frac{dw_1}{d\varphi} = 10.03042 C_1 - 0.59637 C_2,$$

$$\frac{d^2w_1}{d\varphi^2} = 66.65305 C_1 - 75.83704 C_2,$$

$$\frac{d^3w_1}{d\varphi^3} = -70.30525 C_1 - 1012.3234 C_2,$$

$$v_1 = -0.00492643 C_1 - 0.09937429 C_2 - 4.4959333 C_5 + 0.16592994.$$

Die Ergebnisse führen wir in die Gl. (47) ein. Die Konstante $\kappa C_5 = B_5$ mit Hilfe der ersten Gl. (47) eliminiert, lauten die zweite und dritte dieser Gleichungen:

$$33.025330 C_1 - 78.484766 C_2 = 0.18903415,$$

$$83.609730 C_1 - 209.554322 C_2 = 0.$$

Die Auflösung ergibt $C_1 = 0.110493, \quad C_2 = 0.044085$;

weiterhin folgt $C_5 = 0.01284845$

und damit schließlich aus (31)

$$B_1 = -215.171345, \quad B_3 = 130.693398, \quad B_5 = 131.153166.$$

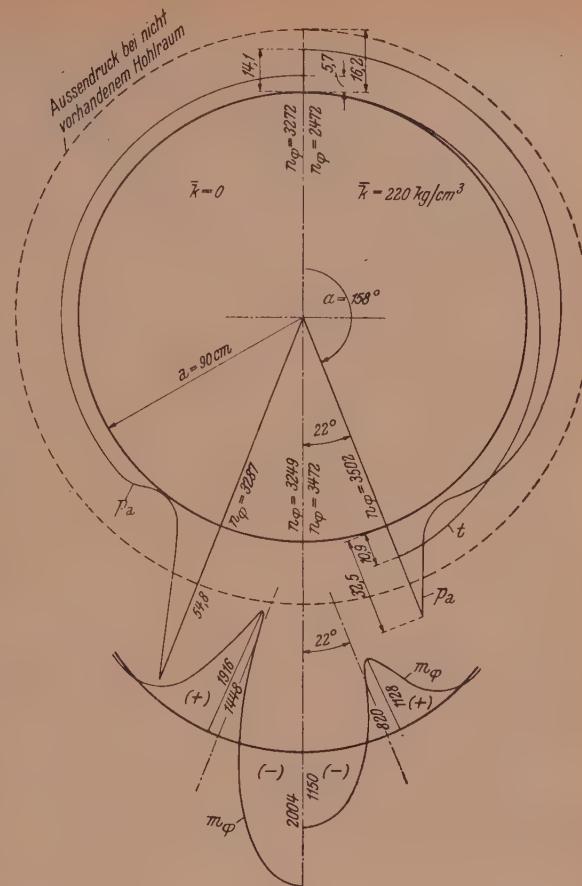


Abb. 4. Stützkräfte p_a und t in kg/cm^2 , Momente m_φ in $\text{kg}\text{cm}/\text{cm}$, Normalkräfte n_φ in kg/cm .

Nun konnten aus (37) die Verschiebungen w der Punkte des oberen Rohrteiles und weiterhin die Rohraußendrücke $p_a = k w$ berechnet werden. Aus den Gl. (48) wurden die Momente m_φ beider Rohrteile ermittelt. Ferner wurden aus (39) und (26) die Ringkräfte n_φ für $\varphi = 0, \alpha$ und π bestimmt.

Die Ergebnisse sind in Abb. 4, linke Hälfte, abgetragen.

Das gleiche Rohr wurde auch für $\alpha = 170^\circ$ für die Fälle $\bar{k} = 220 \text{ kg/cm}^3$ und $\bar{k} = 0$ durchgerechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 5 dargestellt.

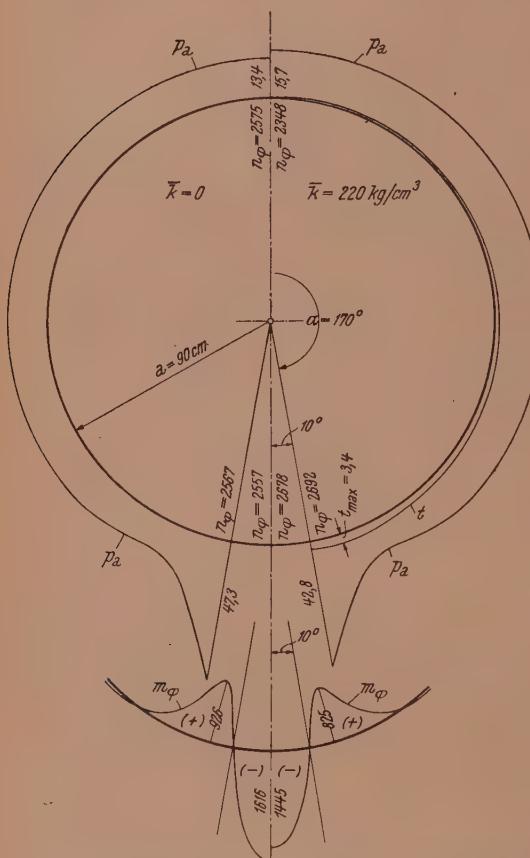


Abb. 5. Stützkräfte p_a und t in kg/cm^2 , Momente m_φ in kg cm/cm , Normalkräfte n_φ in kg/cm .

$\sigma' = \frac{n_\varphi}{\delta} + 6 \frac{m_{\varphi \max}}{\delta^2}$ und $\sigma'' = \frac{n_\varphi}{\delta} - 6 \frac{m_{\varphi \min}}{\delta^2}$ für die Orte des größten positiven und negativen Momentes, ausgedrückt in kg/cm^2 , zusammengestellt:

	$\alpha = 158^\circ$		$\alpha = 170^\circ$	
	$\bar{k} = 220$	$\bar{k} = 0$	$\bar{k} = 220$	$\bar{k} = 0$
σ'	2557	3258	1924	1977
σ''	2567	3330	2538	2660

Der verwendete Stahl besitzt die Fließgrenze $\sigma_F = 2700 \text{ kg/cm}^2$. Im Falle $\alpha = 158^\circ$, $\bar{k} = 0$ würde dann bereits örtlich der Fließzustand erreicht werden. Nach der

Zum Vergleich betrachten wir noch das vom Beton allseits, ohne Hohlraum umschlossene Rohr. Seine Dehnung in Richtung des Umfanges ist

$$\varepsilon_\varphi = \frac{n_\varphi}{D} = \frac{a(p_i - p_a)}{D}$$

und aus dieser folgen die nunmehr konstanten Radialverschiebungen

$$w = a \varepsilon_\varphi = \frac{a^2(p_i - p_a)}{D}.$$

Aus der Gleichsetzung mit $w = \frac{p_a}{k}$ aus (2) erhält man zu $p_i = 42 \text{ kg/cm}^2$ und mit $k = 440 \text{ kg/cm}^3$

$$p_a = 16 \cdot 24 \text{ kg/cm}^2.$$

Im Druckrohr entsteht hierbei die Ringspannung

$$\sigma_\varphi = \frac{a(p_i - p_a)}{\delta} = 950 \text{ kg/cm}^2,$$

während das Rohr vollkommen freiliegend die Spannung

$$\sigma_\varphi = \frac{p_i a}{\delta} = 1540 \text{ kg/cm}^2$$

erhielte.

Die Zusatzspannungen, die nun bei Hohlraumbildungen auftreten, können auch bei verhältnismäßig schmalen Hohlräumen örtlich erhebliche Größe erreichen. Nachstehend sind mit Bezug auf Abb. 4 und 5 die größten Randspannungen

Hypothese der unveränderlichen Gestaltänderungsenergie tritt Fließen ein, wenn die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_x + \sigma_x^2}$$

gleich σ_F wird. Mit $\sigma_x = \mu \sigma_\varphi$ gilt somit für den Fließbeginn

$$\sigma_F = \sigma_\varphi \sqrt{1 - \mu + \mu^2} = 0.89 \sigma_\varphi$$

oder

$$\sigma_\varphi = 1.124 \sigma_F = 3035 \text{ kg/cm}^2.$$

Und dieser Wert wird im betrachteten Falle $\alpha = 158^\circ$, $\bar{k} = 0$, überschritten. Unser Rechnungsergebnis ist dann nicht mehr gültig, da bereits wesentliche bleibende Formänderungen zustande kommen. Die übrigen Ergebnisse bleiben aber in Geltung, denn wir dürfen im Rahmen der Genauigkeit unserer Untersuchung annehmen, daß der Rohrwerkstoff bis zur Fließgrenze hin, also bis $\sigma_\varphi = 3035 \text{ kg/cm}^2$, dem Hookeschen Gesetz gehorche. Es müssen allerdings noch die folgenden Bedingungen erfüllt sein: der Rohraußendruck p_a darf sich nirgends negativ ergeben und er darf anderseits auch die Stauchgrenze des Betons nicht übersteigen; außerdem dürfen im Falle der Berücksichtigung der tangentialen Festhaltekräfte des Rohres die errechneten Kräfte t die möglichen Höchstwerte, gebildet aus Haftfestigkeit plus Reibungsbeitrag ϱp_a , nirgends überschreiten. Diesen Bedingungen wird in allen Fällen entsprochen.

6. Zusammenfassung.

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß Hohlraumbildungen zwischen Druckrohr und Betonhülle erhebliche Steigerungen der Anstrengung des Rohrwerkstoffes (und auch des Betons) herbeiführen können, so daß vergleichsweise die Größtspannungen die Spannung des freiliegenden, durch den gleichen Innendruck belasteten Rohres wesentlich überschreiten. Allerdings treten diese hohen Anstrengungen hier nur örtlich auf; eine unmittelbare Gefahr für den Bestand des Druckrohres können sie schon deshalb nicht bilden, weil ihre Größe durch das plastische Verhalten des Rohrwerkstoffes begrenzt bleibt.

Ferner ist zu ersehen, daß den tangentialen Festhaltekräften des Druckrohres bei größeren Hohlraumbreiten wesentliche Bedeutung zukommen kann, während sie bei schmäleren Hohlräumen von geringerem Einfluß sind. Bei breiterem Hohlraum würde der Spannungszustand des Rohres viel zu ungünstig errechnet werden, ließe man die tangentialen Stützkräfte außer Betracht. Dies gilt allerdings nur so lange, als die möglichen Höchstwerte der Tangentialkräfte nicht überschritten werden. Sonst tritt ein Gleiten des Rohres ein und sein Spannungszustand geht praktisch in jenen über, den man mit $\bar{k} = 0$ errechnen würde. Da Haftfestigkeit und Reibung aber immer mehr oder weniger plötzlich überwunden werden, treten hierbei Anstrengungen im Rohre auf, welche die mit $\bar{k} = 0$ errechneten sogar noch überschreiten können.

(Eingegangen am 16. September 1947.)

Eine Erweiterung der Steifigkeitsmethode.

Von L. Kirste, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Das Beulen dünner Platten oder dünnwandiger Schalen führt auf Stabilitätsuntersuchungen, die mit Knickproblemen von Stäben vieles gemein haben, doch ergeben schon die einfachsten Fälle viel verwickeltere mathematische Zusammenhänge. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß eine wichtige Gruppe solcher Beulerscheinungen, nämlich jene von Plattenstreifen, wie sie bei Polygonrohren und Faltprofilen vorkommen, die nur in einer Richtung gedrückt und in dieser sehr lang sind, sich auf Knickprobleme von Stäben zurückführen lassen, die in besonderer

Weise gestützt sind. Mit Hilfe der Steifigkeitsmethode, deren Grundlagen in Heft 1/2 dieser Zeitschrift mitgeteilt worden sind, lassen sich dann in verhältnismäßig einfacher Weise die weitergeleiteten Steifigkeiten und die kritische Druckspannung ermitteln.

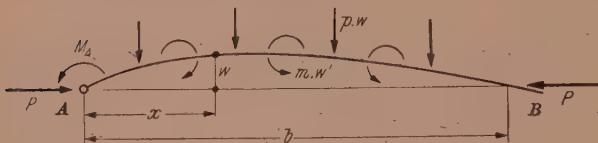


Abb. 1.

Der Stab AB (Abb. 1) sei auf zweifache Weise elastisch gestützt: Durch rückführende Kräfte, die der Ordinate der elastischen Linie und durch rückdrehende Momente, die ihrer Neigung proportional sind, also $p \cdot w$ [kg/cm] und $m \cdot w'$ [kgcm/cm].

Die Momentengleichung führt nach zweimaliger Differentiation auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung

$$M_x = M_A - Ax + \int_0^x p \cdot w(x - \xi) d\xi - \int_0^x m \cdot w' dx + Pw = -EJw''$$

$$M_x'' = p \cdot w + (P - m) \cdot w'' = -EJw^{IV} \quad (1)$$

mit der Lösung

$$w = A \sin \omega_1 x + B \cos \omega_1 x + C \sin \omega_2 x + D \cos \omega_2 x = T(\omega_1) + H(\omega_2),$$

$$w'' = -\omega_1^2 \cdot T + \omega_2^2 \cdot H; \quad w^{IV} = +\omega_1^4 \cdot T + \omega_2^4 \cdot H.$$

Setzt man die trigonometrischen und hyperbolischen Teile gesondert gleich, so folgt

$$\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = -p/EJ \quad \text{und} \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = (P - m)/EJ.$$

Die Randbedingung $w = 0$ für $x = 0$ und $x = b$ gibt

$$D = -B; \quad A \sin \varphi_1 + B(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + C \sin \varphi_2 = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi_{1,2} = b \cdot \omega_{1,2}.$$

Nun sei vorläufig in B gelenkige Lagerung angenommen, also $w'' = 0$ für $x = b$. Damit werden die Konstanten

$$B = \frac{M_A \cdot b^2}{EJ(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)} \quad \text{und} \quad A = -B \operatorname{ctg} \varphi_1; \quad C = B \operatorname{Ctg} \varphi_2$$

und die Verdrehungswinkel in A und in B :

$$w_A' = \frac{M_A}{k_0} \cdot D_2 \quad \text{und} \quad w_B' = \frac{M_A}{k_0} \cdot \frac{D_1}{2},$$

wobei

$$D_1 = \frac{6}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \left(\frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} - \frac{\varphi_2}{\sin \varphi_2} \right); \quad D_2 = \frac{3}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} (\varphi_2 \operatorname{Ctg} \varphi_2 - \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_1)$$

und $k_0 = 3 E J / b$ die Eigensteifigkeit des Stabes bedeuten. Die Endneigungen erscheinen also in derselben Form wie beim Stab ohne Querstützung, für den $p = 0$ und daher auch $\varphi_2 = 0$ zu setzen ist, wodurch D_1 und D_2 in die dort abgeleiteten Koeffizienten C_1 und C_2 übergehen.

Die Verdrehungssteifigkeit in A ist $k_A = k_0/D_2$; sie wird Null für $D_2 = \infty$, also $\varphi_1 = \pi$. Damit ist für den Fall beiderseits gelenkiger Lagerung die Stabilitätsgrenze erreicht; B , C und D verschwinden gegenüber A und die elastische Linie wird eine reine Sinuskurve. Es folgt daraus

$$w = A \sin \frac{x\pi}{b}; \quad w'' = -w \frac{\pi^2}{b^2}; \quad w^{IV} = w \frac{\pi^4}{b^4},$$

$$-EJ w \frac{\pi^4}{b^4} = p \cdot w - (P - m) w \frac{\pi^2}{b^2}; \quad P = EJ \frac{\pi^2}{b^2} + p \frac{b^2}{\pi^2} + m.$$

Für die Knicklast P ergibt sich ein Kleinstwert, wenn $EJ \pi^2/b^2 = p \cdot b^2/\pi^2$, also $b_{kr} = \pi \sqrt{EJ/p}$ wird. Ist die vorhandene Feldbreite b ein ganzzahliges Vielfaches davon oder groß gegenüber b_{kr} , so kann sich diese kritische Halbwellenlänge tatsächlich einstellen und es wird

$$P_{min} = 2 \sqrt{EJ p} + m.$$

Wenn die Koeffizienten p und m der elastischen Stützung bekannt sind — wie dies beispielsweise bei Hallen-Wandständern der Fall sein kann — so sind D_1 und D_2 berechenbar. Damit wird auch bei eingespannten oder durchlaufenden Stäben die Ermittlung der weitergeleiteten Steifigkeit, der Momentenverteilung oder der Stabilitätsgrenze auf den Fall eines gewöhnlichen Stabwerks zurückgeführt.

Die gefundenen Beziehungen lassen sich aber auch auf die dünne, rechteckige Platte anwenden, die man sich zu diesem Zweck in Längs- und Querstreifen zerlegt denkt (Abb. 2). Biegt sich ein Querstreifen durch, so müssen sich die ihn stützenden Längsstreifen nicht nur verbiegen, sondern auch verdrehen, wenn der Zusammenhang gewahrt bleiben soll. Für den Querstreifen gelten dann dieselben Verhältnisse wie für den vorhin betrachteten Stab mit zweifacher elastischer Querstützung. Allerdings ist die Stützung hier eine „negative“, da ja die Längsstreifen für sich allein früher ausknicken würden, als im Verband mit den Querstreifen und daher auf die letzteren nicht rückführend, sondern auslenkend wirken. Ist deren Länge b gegeben und klein gegenüber l , so wird sich, wenn in den Längsstreifen eine Axialspannung σ_y vorhanden ist, die kritische Feldlänge einstellen können und die Verformung in der Y -Richtung nach reinen Sinus-Linien erfolgen.

Die rückführenden Kräfte und Momente ergeben sich aus der bekannten „Platten-gleichung“

$$\frac{Et^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

in der unter Berücksichtigung sinusförmiger Verformung in der Y -Richtung zu setzen ist

$$\text{somit } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} w; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\pi^4}{b^4} \cdot w; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\frac{Et^2}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\sigma_x - \frac{2Et^2\pi^2}{12(1-\mu^2)b^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\sigma_y - \frac{Et^2\pi^2}{12(1-\mu^2)b^2} \right) \cdot \frac{\pi^2}{b^2} \cdot w = 0.$$

Man erkennt die Analogie mit der Gl. (1) für den elastisch gestützten Stab, wenn man schreibt

$$p = -\left(\sigma_y - \frac{Et^2\pi^2}{12(1-\mu^2)b^2} \right) \frac{\pi^2}{b^2} = -\frac{Et^2}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{\varphi_1^2 \varphi_2^2}{b^4} \quad (2)$$

und

$$P - m = \sigma_x - \frac{2Et^2\pi^2}{12(1-\mu^2)b^2} = \frac{Et^2}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{b^2}. \quad (3)$$

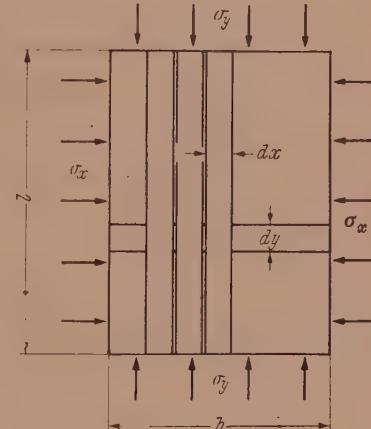


Abb. 2.

Einen besonders wichtigen Spezialfall bilden die aus Blech gefalteten reinen Druckstäbe, die nur in der Y-Richtung beansprucht werden. Für sie ist $\sigma_x = 0$ und $\varphi_2^2 - \varphi_1^2 = \frac{2b^2\pi^2}{l^2}$. Setzt man $\frac{E t^2 \pi^2}{12(1-\mu^2) \cdot l^2} = \sigma_l$, so erscheinen die beiden Knickwinkel in der Form

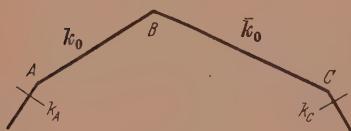


Abb. 3.

$$\varphi_1 = \frac{b\pi}{l} \sqrt{\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_l}} - 1}; \quad \varphi_2 = \frac{b\pi}{l} \sqrt{\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_l}} + 1}.$$

Normalerweise haben in allen Feldern t und σ_y die gleichen Werte, zufolge der Kontinuität an den Kanten auch die Knicklänge l ; also sind die für ein Feld gelgenden Knickwinkel φ_1, φ_2 der Feldbreite direkt proportional.

Nach der Steifigkeitsmethode hat man in einem Stabwerk für die weitergeleitete Steifigkeit in B , wenn k_A die Anschlußsteifigkeit in A ist: $k_B = \frac{k_0 + \sigma_2 k_A}{\sigma_2 + \sigma_3 \cdot k_A/k_0}$ und die Stabilitätsgrenze ist erreicht, wenn in irgend einem Knoten die Summe der Steifigkeiten aller starr angeschlossenen Stäbe gleich Null wird. Schließen nun zwei Plattenstreifen in der Kante B aneinander (Abb. 3), so hat man dort in analoger Weise, wenn die überstrichenen Werte für das Feld \overline{BC} gelten und k_A und k_C die Anschlußsteifigkeiten sind:

$$\frac{k_0 + D_2 \cdot k_A}{D_2 + D_3 \cdot k_A/k_0} + \frac{\bar{k}_0 + \bar{D}_2 \cdot k_C}{\bar{D}_2 + \bar{D}_3 \cdot k_C/\bar{k}_0} = 0. \quad (4)$$

Die Argumente von D_2, D_3 sind φ_1 und φ_2 ; die von \bar{D}_2, \bar{D}_3 sind $\bar{b}/b \cdot \varphi_1$ und $\bar{b}/b \cdot \varphi_2$. Zum Unterschied vom „Stabwerk“ treten beim „Faltwerk“ zwei verschiedene, aber zusammengehörige Knickwinkel auf. Eliminiert man l aus Gl. (2) und (3), so findet man

$$\sigma_y = \frac{E t^2}{12(1-\mu^2)b^2} \cdot \frac{(\varphi_2^2 + \varphi_1^2)^2}{2(\varphi_2^2 - \varphi_1^2)}.$$

Gl. (4) liefert Wertepaare von φ_1 und φ_2 ; daraus ist jenes auszuwählen, mit dem σ_y ein Minimum wird. Sind die Kanten A und C gelenkig gehalten, so reduziert sich die Gl. (4) auf

$$\frac{k_0}{D_2} + \frac{\bar{k}_0}{\bar{D}_2} = 0 \quad \text{somit} \quad \operatorname{Ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{Ctg} \left(\frac{\bar{b} \varphi_2}{b} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\bar{b} \varphi_1}{b} \right) = 0.$$

Für nicht zu extreme Werte von \bar{b}/b ist φ_1 von φ_2 nahezu unabhängig und kann daher direkt berechnet werden. Den zugehörigen Wert von φ_2 erhält man aus

$$\text{somit} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varphi_2} = 0 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{(\varphi_2^2 + \varphi_1^2)^2}{\varphi_2^2 - \varphi_1^2}; \quad \varphi_2 = \varphi_1 \sqrt{3},$$

$$\sigma_y = \frac{E t^2}{12(1-\mu^2) \cdot b^2} \cdot 4 \varphi_1^2 = 0.3663 \frac{E t^2}{b^2} \cdot \varphi_1^2.$$

Man findet für $\bar{b}/b = 0.5 \quad 1.0 \quad 2.0 \quad 3.0$

$$\varphi_1 = 3.56 \quad 3.14 \quad 1.81 \quad 1.20$$

$$\varphi_2 = 6.16 \quad 5.44 \quad 3.14 \quad 2.08$$

$$l/b = 0.883 \quad 1.00 \quad 1.74 \quad 2.62$$

$$\sigma_y = 4.64 \quad 3.62 \quad 1.19 \quad 0.528$$

$$\sigma_l = 1.16 \quad 0.904 \quad 0.298 \quad 0.132 \quad \} \times \frac{E t^2}{b^2}.$$

Sind mehrere Felder miteinander verbunden — was dem Fall des „durchlaufenden“ Stabes entspricht —, so wird die strenge Rechnung umständlich; man kommt aber zu einer sehr guten Näherungslösung, die auf der „sicheren“ Seite liegt, wenn man die Bedingung überall gleicher Knicklänge nicht berücksichtigt und dafür jene annimmt, durch welche die Knickspannung in jedem Feld, für sich betrachtet, zu einem Minimum wird, wie dies Franz Müller getan hat.¹

¹ Franz Müller: Kritische Last und Tragfähigkeit dünnwandiger Abkantprofile. Dissertation Wien 1945.

Betrachtet man ein Einzelfeld mit den Anschlußsteifigkeiten k_A und k_B , so ist das Stabilitätskriterium

$$k_A + \frac{k_0 + D_2 k_B}{D_2 + D_3 \cdot k_B/k_0} = 0 \quad \text{oder} \quad k_0 + D_2 (k_A + k_B) + D_3 \frac{k_A k_B}{k_0} = 0. \quad (5)$$

Lundquist and Stowell² haben gefunden, daß sich die kritische Druckspannung in diesem Fall mit guter Näherung als Funktion der Summe oder des Produktes von k_A und k_B ausdrücken läßt, was nach Gl. (5) verständlich erscheint. Sind die Kanten gegen Verschieben gar nicht oder nur elastisch festgehalten, so ergeben sich — ähnlich wie beim Stabwerk mit verschiebbaren Knoten — bedeutend verwinkelte Verhältnisse, auf die hier noch nicht eingegangen werden soll. Hingegen findet man bekannte Werte der kritischen Druckspannung wieder, wenn man für k_A und k_B in Gl. (5) entweder Null oder ∞ einsetzt.

Für die beiderseits gelenkig gelagerte Platte ist $k_A = k_B = 0$;

$$D_2 = \infty = \frac{3}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} (\varphi_2 \operatorname{Ctg} \varphi_2 - \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_1), \quad \text{woraus} \quad \varphi_1 = \pi.$$

Die Minimumsbedingung liefert $\varphi_2 = \pi \sqrt{3}$; damit wird

$$l = b; \quad \sigma_y = 0.3663 \cdot \frac{E t^2}{b^2} \cdot \pi^2 = 3.615 \frac{E t^2}{b^2}.$$

Bei einseitiger Einspannung ist $k_A = \infty$, $k_B = 0$, also

$$\infty + \frac{k_0}{D_2} = 0; \quad D_2 = 0; \quad \varphi_2 \operatorname{Ctg} \varphi_2 = \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert Wertepaare für φ_1 und φ_2 ; durch Einsetzen in den Ausdruck für σ_y findet man jenes, das den Kleinstwert ergibt:

$$\varphi_1 = 3.64; \quad \varphi_2 = 6.71; \quad l = 0.79 b; \quad \sigma_y = 4.89 \frac{E t^2}{b^2}.$$

Bei beiderseitiger Einspannung findet man in analoger Weise:

$$\begin{aligned} k_A &= k_B = \infty; \quad \infty + D_2/D_3 = 0; \\ \varphi_1 &= 4.06; \quad \varphi_2 = 7.90; \quad l = 0.66 b; \quad \sigma_y = 6.31 \frac{E t^2}{b^2}. \end{aligned}$$

(Eingegangen am 9. September 1947.)

Geometrische Optik bei Röntgenrückstrahlauflnahmen.

Von F. Regler, Wien.

Mit 6 Textabbildungen.

I. Historischer Überblick.

Schon in seinen ersten grundlegenden Veröffentlichungen aus den Jahren 1895/96 betont W. C. Röntgen die geradlinige Fortpflanzungsrichtung der Röntgenstrahlen sowie ihre Unbeeinflußbarkeit durch elektrische sowie magnetische Felder und weist auf die Ähnlichkeit der Eigenschaften zwischen Licht- und Röntgenstrahlen hin. Bestärkt wurde die Vorstellung von der Wesensgleichheit der beiden Strahlenarten durch Meßergebnisse über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Röntgenstrahlen zu $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$, die im Jahre 1902 von R. Blondlot und 1910 von E. Marx erhalten wurden. Naturgemäß fehlte es von Anfang an nicht an Versuchen, auch andere Erscheinungen an Röntgenstrahlen aufzufinden, die ihre Verwandtschaft mit den

² Lundquist and Stowell: Critical compressive stress for flat rectangular plates. NACA Report No. 733.

Lichtstrahlen nachweisen sollten. Insbesondere waren es Untersuchungen über die Reflexionsfähigkeit, die Brechbarkeit, die Polarisation und die Interferenzfähigkeit der Röntgenstrahlen, die von den Physikern der damaligen Zeit angestellt wurden, aber durchwegs zu negativen Ergebnissen führten. Daher schien es vorerst aussichtslos, eine Optik der Röntgenstrahlen auszubauen zu können, da sich diese bloß auf die geradlinige Fortpflanzung der Röntgenstrahlen, also auf die Erzeugung von Schattenbildern mittels Zentralprojektion erstrecken konnte, welche Eigenschaft sich die medizinische Diagnostik sofort nach der Entdeckung der Röntgenstrahlen zunutze machte. Auch für Werkstoffdurchstrahlungen wurde die Möglichkeit der Erzeugung von Röntgen-Schattenbildern von Röntgen selbst bei der historischen Untersuchung seines Jagdgewehres angewandt, und so wurden die Röntgenstrahlen lange vor ihrer physikalischen Erforschung der Praxis dienstbar gemacht. Wenngleich viele wichtige Erkenntnisse über die Wechselwirkung zwischen Röntgenstrahlen und Materie, wie beispielsweise über die Absorption der Röntgenstrahlen oder über die Emission von Streu- sowie von Fluoreszenzstrahlung schon zu dieser Zeit gewonnen wurden, so handelte es sich dabei stets um eine mehr oder weniger phänomenologische Beschreibung dieser Erscheinungsformen, ohne daß ihre quantitativen Zusammenhänge erfaßt wurden.

Hier wurde erst Wandel geschaffen durch die geniale Entdeckung der Röntgenstrahlenbeugung am Raumgitter der Kristalle, die im Jahre 1912 M. v. Laue und seinen Mitarbeitern W. Friedrich und P. Knipping gelungen war. Die einfache Vorstellung über die Röntgenstrahlenbeugung und vor allem die Aufstellung einer einprägsamen, elementaren Formel für diesen Vorgang verdankt die Physik den beiden Engländern W. H. und W. L. Bragg, die ihre im Anschluß an die Untersuchungen Laues angestellten Versuche und Überlegungen in der sogenannten Braggschen Gleichung oder Beugungsbedingung für Röntgenstrahlen zusammenfaßten, die bekanntlich lautet: $n \lambda = 2 d \cdot \sin \vartheta$. In dieser Formel bedeuten n die Ordnung des Beugungsbildes, also eine beliebige ganze Zahl, λ die Wellenlänge der Röntgenstrahlung, d den Netzebenenabstand der beugenden Netzebenenschar und ϑ den Einfalls- bzw. Austrittswinkel der Strahlung mit der Netzebene. Nach der Braggschen Darstellung kann man die Röntgenstrahlenbeugung am Kristallgitter als selektive Spiegelung der gebeugten Strahlung an der beugenden Netzebenenschar auffassen, da der einfallende und der gebeugte Strahl mit dem im Strahlenauftreffpunkt errichteten Netzebenenlot in einer Ebene liegen und der Einfallswinkel stets gleich dem Reflexionswinkel ist. Da die Gitterkonstante, das ist der Abstand identischer Atome für einfache, regulär kristallisierende Körper, etwa für Steinsalz, aus dem Molekulargewicht, der Dichte und der Loschmidttschen Zahl leicht ausgerechnet werden kann, wodurch man auch die Abstände der einzelnen Netzebenenscharen erhält, war nunmehr die Wellenlänge der Röntgenstrahlen experimentell meßbar und wurde von der Größenordnung 10^{-8} cm gefunden.

Mit Verbesserung der Versuchsbedingungen wurde es möglich, einerseits langwellige Röntgenstrahlen zu erzeugen und den Anschluß an das ultraviolette Gebiet der Optik zu finden, anderseits besonders kurzwellige Röntgenstrahlen zu erzeugen, deren Wellenlänge der der γ -Strahlung des Radiums entspricht. Üblicherweise nimmt man heute als langwellige Grenze des Röntgenspektrums gegen das Ultraviolett eine Wellenlänge von 100 Å an, während das Röntgenspektrum auf der kurzwelligen Seite keine Grenze besitzt. Röntgenstrahlung, deren Wellenlänge größer ist als etwa 3 Å, wird aber in Luft von Atmosphärendruck schon sehr stark absorbiert, so daß man in der Praxis im allgemeinen nur mit einer Röntgenstrahlung experimentiert, deren Wellenlänge kürzer ist als 3 Å.

Wegen der Kürze der Wellenlänge der Röntgenstrahlung muß im Röntgengebiet eine der optischen Spiegelung ähnliche Erscheinung fehlen, da die Rauheit jeder für die Spiegelung in Betracht kommenden Fläche stets von mindestens der gleichen Größenordnung ist als die Wellenlänge der Röntgenstrahlung selbst. Der Sachverhalt liegt also seit dem Jahre 1912 so, daß für die Röntgenstrahlenbeugung natürliche Beugungsgitter in der Form der Kristalle in beliebiger Menge zur Verfügung stehen und daß sich die Beugungerscheinungen durch eine elementare Gleichung, nämlich die Braggsche Gleichung, beschreiben lassen. Die Apparatur zur Röntgenstrahlenbeugung ist denkbar einfach, da diese je nach Verwendungszweck und Bauart bloß einen Einkristall oder ein polykristallines Kristallkonglomerat als beugendes Medium, aber wegen des Fehlens von Röntgenlinsen keinerlei optische Teile außer Spalt und Lochblendenkombinationen enthält. Zum Nachweis der gebeugten Strahlung dienen entweder photographische Schichten, Fluoreszenzschirme oder Ionisationskammern bzw. Zählrohrgeräte. Grundsätzlich kann man die Spektralapparate mit Kristallen bekannter Struktur ausrüsten und dann die spektrale Zusammensetzung der Röntgenstrahlung untersuchen oder aber mit definierter Röntgenstrahlung die unbekannte Kristallstruktur des beugenden Mediums ermitteln (Röntgenspektralanalyse bzw. Kristallstrukturanalyse). Nach dem geschilderten Sachverhalt erfolgt die Röntgenstrahleninterferenz auf relativ einfacher Grundlage. Anderseits gibt es aus den erwähnten Gründen im Röntgengebiet keine der optischen Spiegelung äquivalente Erscheinung. Die Brechung der Röntgenstrahlen wurde wegen der ganz geringfügigen Abweichung des Brechungsindex vom Wert Eins erst verhältnismäßig spät entdeckt und ist nur bei Präzisionsuntersuchungen von Bedeutung. Diese Tatsachen brachten er mit sich, daß die Optik der Röntgenstrahlen stets gesondert von der Optik des Lichtes behandelt wurde, und daß insbesondere bloß die Wellenoptik der Röntgenstrahlen eingehend untersucht wurde, während der Strahlenoptik eine ganz untergeordnete Bedeutung zukam.

II. Optik der Röntgenstrahlen.¹

Die Spektroskopie der Röntgenstrahlen führte zu der Erkenntnis, daß es im Gebiet der Röntgenstrahlen genau wie im Bereich des sichtbaren und ultravioletten Lichtes zwei verschiedene Arten von Röntgenspektren gibt, nämlich einerseits das kontinuierliche oder Bremsspektrum, das dem weißen Licht der Optik entspricht, und das charakteristische oder Fluoreszenzspektrum. Letzteres besteht aus Serien von mehr oder minder intensiven Spektrallinien, die dem Bremsspektrum überlagert sind und mit den aus der optischen Spektroskopie bekannten Serien (Balmer-Lyman-Paschen-Serie im Wasserstoffspektrum) verglichen werden können. Die kürzeste mögliche Wellenlänge λ_0 des Bremsspektrums, der eine maximale Frequenz v_0 entspricht, ist durch die Quantenbeziehung für den lichtelektrischen Effekt $h v = e V$ festgelegt. Diese Beziehung ist die Grundlage für das Gesetz von Duane und Hunt, das nach Einsetzen der Zahlenwerte in die Gleichung für den lichtelektrischen Effekt und nach Berücksichtigung der Maßsysteme lautet: $\lambda_0 = \frac{12.39}{kV}$ (Å), in welcher Gleichung λ_0 in Angström und die Röntgenröhrenspannung in Kilovolt (kV) gemessen werden. Allgemein gilt also: $\lambda_0 \cdot V = \text{konst.}$ Nach den Untersuchungen von Dauvillier besteht zwischen dem Intensitätsmaximum des Bremsspektrums mit der Wellenlänge λ_m und der Grenzwellenlänge λ_0 die Beziehung: $\lambda_m = 1.3 \lambda_0$. Durch Einsetzen erhält man für das kontinuierliche Röntgenspektrum die Beziehung $\lambda_m \cdot V = \text{konst.}$, die dem Wienschen Verschiebungsgesetz der Optik $\lambda_m \cdot T = \text{konst.}$ äquivalent ist, wenn man die Röntgenröhrenspannung V durch die absolute Temperatur T des strahlenden Körpers ersetzt.

Das charakteristische Röntgenspektrum ist im Gegensatz zum kontinuierlichen Röntgenspektrum von der Röntgenröhrenspannung unabhängig und wie die optischen Spektralserien nur für das sie emittierende Element charakteristisch. Wie im optischen Spektrum, unterscheidet man verschiedene Spektralserien, deren kurzwelligste K-Serie, die langwelligeren L-, M-, N-, O- und P-Serie heißen. Die Röntgenspektrallinien entstehen oder verschwinden niemals einzeln, sondern immer nur als ganze Serien oder Untergruppen von Serien, wobei Bedingung für die Entstehung von Serien die Überschreitung der ihnen entsprechenden Anregungsspannung ist, die wieder mit der Quantenbeziehung für den lichtelektrischen Effekt zusammenhängt. Charakteristische Röntgenspektren entstehen jedoch nicht nur bei direkter Anregung durch Kathodenstrahlenbombardement, sondern auch bei indirekter oder Sekundäranregung, wenn ein Element in oder außerhalb der Röntgenröhre von Röntgenstrahlen getroffen wird. Diese Fluoreszenzröntgenstrahlung besteht wieder aus den beschriebenen Spektralserien und ist nur für das emittierende Element charakteristisch, jedoch völlig unabhängig von der Wellenlänge und Zusammensetzung der erregenden Strahlung. Bedingung ist bloß, daß die anregende Strahlung mindestens etwas kurzwelliger ist als die kürzeste Linie der angeregten Serie der Fluoreszenzstrahlung. In der Optik hat die zuletzt angeführte Bedingung zwischen der Wellenlänge der angeregten und der anregenden Strahlung ihre Parallele in der bekannten Stokesschen Regel. Die charakteristische Röntgenstrahlung kommt dadurch zustande, daß aus einer inneren Schale des Atoms ein Elektron durch eine Kathodenstrahlung oder durch ein Photon an die äußerste Grenze des Atoms geschleudert wird, wodurch dessen Energieinhalt vergrößert wird. Durch Quantensprung des Elektrons aus einer äußeren in eine innere Schale wird der ursprüngliche Energiezustand wiederhergestellt und die freiwerdende Energie in Form von monochromatischer Röntgenstrahlung emittiert. Da die inneren Schalen des Atoms voll besetzt sind, kann das Elektron nicht etwa aus der innersten auf eine weiter außen liegende innere Schale gehoben werden (Pauli-Verbot), sondern ist eine tiefe Ionisierung nur möglich durch Ausschleuderung des Elektrons an die äußerste Grenze des Atoms. Aus diesem Grunde gibt es im Röntgengebiet keine Absorptionslinien, sondern bloß Absorptionskanten, deren Frequenz gegeben ist durch die durch das Plancksche Wirkungsquantum dividierte Ionisierungsarbeit der betreffenden Schale, der die Absorptionskante angehört. Daher gibt es für jede Spektralserie bzw. Untergruppe einer solchen nur eine Absorptionskante, deren Frequenz immer größer ist als die der kurzweligsten Linie der entsprechenden Serie bzw. Untergruppe. Das Fehlen von Absorptionslinien und das bloße Auftreten von Absorptionskanten im Röntgengebiet bedeuten keine Aufhebung des Kirchhoff'schen Reziprozitätsgesetzes der Optik, sondern sind bloß durch die geringe Wahrscheinlichkeit bedingt, daß sich auf einer inneren Schale ein leerer Platz befindet. Genau wie im optischen Gebiet kann auch im Röntgengebiet Photonenenergie nicht akkumuliert werden und muß die Energie eines Photons zur Hebung eines Elektrons ausreichen, weshalb ungenügende Photonenenergie nicht durch Erhöhung der Strahlensintensität ersetzt werden kann.

Beim Vorgang der tiefen Ionisation eines Atoms bleibt stets ein Atomrumpf zurück, dessen hinausgeschleudertes Elektron weit hinausgehoben wird, so daß Röntgenspektren immer in erster Näherung alkaliähnlich sind, wie schon von A. Landé festgestellt wurde. Entsprechend der Ähnlichkeit der Röntgenspektren mit den optischen Spektren gilt auch für sie das Kombinationsprinzip, wonach die Frequenz einer Spektrallinie sich stets als die durch das Plancksche Wirkungsquantum geteilte Differenz der Ionisierungsarbeiten der beiden Schalen, zwischen denen der Quantensprung erfolgt, darstellen läßt. Daß im Röntgengebiet noch keine Erscheinungen gefunden wurden, die mit dem Stark-, Zeemann- oder Stern-Gerlach-Effekt der

Optik vergleichbar wären, ist auf die stark abschirmende Wirkung der Hüllenelektronenbahnen auf die inneren Quantenbahnen zurückzuführen.

Bekanntlich wird jeder von Röntgenstrahlen getroffene Körper selbst wieder zur Quelle von Röntgenstrahlen, die in alle Richtungen des Raumes ausgesendet werden und gleiche Wellenlänge haben wie die auftreffende Strahlung. Diese nach ihrer Entstehung als klassisch gestreute Strahlung bekannte Streustrahlung, die erst die Interferenzfähigkeit der Röntgenstrahlung ermöglicht, hat ihr Analogon in der Optik im Tyndall-Effekt, also in der Streuung des Lichtes in trüben Medien. Außer der klassisch gestreuten Strahlung gibt es im Röntgengebiet noch die sogenannte Compton-Streustrahlung mit längerer Wellenlänge als die auftreffende Röntgenstrahlung, wobei die Wellenlänge der Compton-Strahlung vom Azimut abhängig ist. Die Compton-Strahlung ist dem Raman-Effekt der Optik vergleichbar, wobei letzterer jedoch durch Wechselwirkung der Strahlung mit dem getroffenen Molekül entsteht, während beim Compton-Effekt ein Lichtquant und ein freies Elektron in Beziehung treten. Die Compton-Strahlung ist im Gegensatz zur klassischen Streustrahlung stets inkohärent, weshalb man bei ihrer Entstehung ähnlich wie bei der Rayleighschen Streuung von Licht an Staubteilchen oder Gasmolekülen ein Element der Ungeordnetheit, nämlich die zeitliche Veränderlichkeit der Phasen der Materiewellen, annehmen muß. Wegen der geringen Veränderung der atomaren Energie beim Zusammenschluß von Atomen zu Molekülen hat die Veränderung der Hüllenelektronenbahnen außer bei ganz leichten Elementen auf den Energiegehalt der inneren Schalen keinen nennenswerten Einfluß, wenn dieser auch durch Präzisionsmessungen meist nachweisbar ist. Die Röntgenspektren sind daher im weiten Maße vom Molekülbau unabhängig. Aus dem gleichen Grunde gibt es im Röntgengebiet auch keine Absorptionsbanden, wie sie im optischen Gebiet, verursacht durch die Molekülbildung, auftreten.

Die klassische Streustrahlung, also die Streustrahlung ohne Wellenlängenänderung, entsteht durch die Anregung eines freien Elektrons zu Eigenschwingungen von gleicher Frequenz wie die Primärstrahlung. Da nur die auf die beobachtete Streustrahlrichtung senkrecht stehende Schwingungskomponente des Elektrons einen Beitrag zur Streustrahlenenergie liefern kann, ist die Streustrahlung stets polarisiert, wie man durch nochmalige Streuung einfach nachweisen kann. Durch klassische Streuung gibt es also auch im Röntgengebiet eine dem optischen Polarisator und Analysator vergleichbare Vorrichtung.

Haben die bisher angestellten Überlegungen schon gezeigt, daß zwischen Licht- und Röntgenstrahlen keine grundsätzlichen, sondern nur graduelle Unterschiede bestehen, so liefert die im Jahre 1919 von W. Stenström beobachtete und von P. P. Ewald sowie von C. G. Darwin im Jahre 1920 theoretisch geforderte Brechung der Röntgenstrahlen die Vervollständigung der Analogie der beiden verschiedenen Wellenlängenbereiche des Spektrums. Von W. Stenström wurde nämlich durch Präzisionsmessungen gefunden, daß durch Beugung ein- und derselben Strahlung an dem gleichen Kristall voneinander abweichende Wellenlängenwerte gefunden werden, wenn man die einzelnen Ordnungen des Spektrums auswertet, wobei die Wellenlänge mit zunehmender Ordnungszahl der gebeugten Strahlung stets kleiner wird. Der durch die Braggsche Gleichung bedingte Ausdruck $\frac{\sin \theta_n}{n} = \frac{\lambda}{2d}$ ist also nicht, wie gefordert, konstant, sondern nimmt mit zunehmendem n ab. Als Ursache für diese Erscheinung wurde von Stenström die Brechung der Röntgenstrahlen beim Übergang von einem Medium in ein anderes angenommen. Diese Annahme wurde durch Versuche von Bergen Davis wesentlich gestützt, bei welchen durch Verkleinerung des Winkels zwischen Primärstrahl und Kristalloberfläche auf weniger als 1° unter Beibehaltung der beugenden Netzebenenschar die normale Abweichung von der

unkorrigierten Braggschen Gleichung um das 10- bis 100fache vergrößert wurde. Da die Abweichung von der Braggschen Gleichung demzufolge von dem Winkel abhängt, den der ein- bzw. austretende Strahl mit der Kristalloberfläche einschließt, ist die Berechtigung erwiesen, die erwähnte Abweichung auf die Brechung der Röntgenstrahlen zurückzuführen. Da jedoch der Brechungsindex stets nur sehr wenig von 1 verschieden ist — die Größenordnung der Dispersion beträgt etwa 10^{-4} bis 10^{-6} — ist die durch die Brechung hervorgerufene Änderung der Strahlrichtung ebenfalls nur gering, und es war daher erst die Ausbildung von Präzisionsmethoden der Röntgenspektroskopie nötig, um den Effekt überhaupt nachweisen zu können. Trotzdem gelang es A. Larsson, M. Siegbahn und J. Waller, eine spektrale Zerlegung der Röntgenstrahlen durch ein Glasprisma durchzuführen. In späteren Jahren wurden Prismen aus amorphen und kristallinen Körpern mit gutem Erfolg zur spektralen Zerlegung der Röntgenstrahlen verwendet.

Entgegen dem Verhalten des optischen Lichtes erfolgt bei Röntgenstrahlen beim Übergang aus dem Vakuum in ein Medium stets eine Brechung vom Lot, es erfolgt also im Medium gegenüber dem Vakuum eine Wellenlängenzunahme. Die dadurch bedingte Totalreflexion der Röntgenstrahlen beim Übergang aus dem Vakuum in Materie für sehr spitze Auftreffwinkel konnte experimentell von A. H. Compton nachgewiesen werden. Damit war auch die Möglichkeit der Röntgenstrahlenbeugung am optischen Strichgitter gegeben, wenn die Primärstrahlung den Träger des Gitters so streifend trifft, daß sie total reflektiert wird. Experimentell konnten Beugungsspektren von Röntgenstrahlen mittels optischer Strichgitter sowohl an Metall- als auch an Glasgittern erhalten werden, wobei die Ableitung der Beugungsbedingung vollkommen den aus der Optik bekannten Überlegungen entspricht. Die Zahl der Striche pro Millimeter schwankt dabei je nach dem Verwendungszweck zwischen 50 und 1200. Auf diese Weise ist es möglich, absolute Wellenlängenmessungen der Röntgenstrahlen, die auf Längenmessungen zurückzuführen sind, auszuführen. Die dabei erhaltene ausgezeichnete Übereinstimmung mit den durch Kristallgitterbeugung erhaltenen Wellenlängenwerten — die Abweichungen sind von der Größenordnung 1 bis 2% — ist in Anbetracht der experimentellen Schwierigkeiten ein neuerlicher Beweis für die hohe Genauigkeit der Loschmidttschen Zahl, die der Berechnung der am Kristallgitter gebeugten Wellenlängen zugrunde liegt. Im Gebiet langwelliger Röntgenstrahlen lassen sich absolute Wellenlängenmessungen auch durch Beugung am Spalt bzw. durch Fresnelsche Interferenzen erhalten. Die aus der Optik bekannte klassische Lorentzsche Dispersionsformel für den Zusammenhang zwischen der Dispersion des Lichtes und seiner Wellenlänge gilt auch im Röntgengebiet, nur daß man die Eigenfrequenz der Elektronen gegen die hohe Frequenz der Röntgenstrahlen vernachlässigen kann. Ausgenommen das Gebiet der selektiven Absorption, also die Nähe der Absorptionskanten, ist $\frac{\delta}{\lambda^2}$ nahezu konstant, und zwar gilt die Beziehung: $\frac{\delta}{\lambda^2} = 1.36 \cdot 10^{-6} \cdot \varrho$, wenn man λ in Å rechnet und ϱ die Dichte des brechenden Mediums bedeutet. Der Brechungsexponent $\mu = 1 - \frac{\delta}{\lambda^2}$.

III. Geometrische Optik der Röntgenstrahlen.

Bekanntlich hat das Auflösungsvermögen der optischen Mikroskope eine Grenze für Dingpunkte, die im Objekt etwa um $\frac{\lambda}{2}$ voneinander entfernt sind. Haben die Objekte eine periodische Struktur (Gitterstruktur), so treten Interferenzerscheinungen auf, die das Auflösungsvermögen der Mikroskope ebenfalls in der angegebenen Größenordnung beschränken und die seinerzeit von E. Abbe zum Ausgangspunkt seiner Behandlung der optischen Abbildung gemacht worden waren. Mit Hilfe der Röntgen-

interferenzen ist es nun möglich, wesentlich kleinere Abstände als mit optischem Lichte zu vermessen, wenn die zur Untersuchung gelangenden Objekte eine periodische Struktur haben und daher die Braggsche Gleichung anwendbar ist. Die Röntgeninterferenzen vermitteln also eine viel weitergehende Kenntnis über den Aufbau der Materie, als sie das optische Mikroskop zu liefern vermag, wobei aber nicht etwa ein vergrößertes Bild des Gegenstandes entsteht, sondern der Abstand periodisch wiederkehrender Dingpunkte des Objektes durch rechnerische Auswertung des Beugungsbildes erhalten wird. Je ausgeprägter die Periode des Objektes ist, um so schärfer werden die Beugungsbilder und um so eindeutiger und genauer kann die Berechnung der Abstände dieser Punkte erfolgen. Aus diesem Grund findet die Röntgenstrahlenbeugung ihr Hauptanwendungsgebiet in der Kristallstrukturanalyse, da die Periodizität des Raumgitters der Kristalle ein ideales Beugungsgitter für Röntgenstrahlen liefert. Die Dingpunkte im Kristallgitter sind die Atome bzw. die Moleküle, so daß die Röntgenstrahlenbeugung die Atom- bzw. Molekülabstände in kristallinen Körpern zu erfassen gestattet. Es zeigte sich jedoch, daß Röntgeninterferenzen nicht nur an Kristallgittern erhalten werden, sondern daß auch bei Streuung von Röntgenstrahlen an Flüssigkeiten und Gasen Intensitätsmaxima zu beobachten sind, die allerdings nicht scharf sind, sondern diffus verlaufen.

In Gasen entstehen diese Interferenzfiguren durch die Atomanordnung innerhalb der Moleküle. Bei Flüssigkeitsuntersuchungen treten neben den an Gasen derselben Substanz beobachteten Intensitätshöchstwerten noch neue hinzu, woraus einerseits zu schließen ist, daß der Molekülbau in Flüssigkeiten und Gasen der gleiche ist, und daß anderseits die Moleküle in Flüssigkeiten gewisse wahrscheinliche Abstände voneinander haben. Man kann daher eine Art kristallähnliche Struktur der Flüssigkeiten annehmen, die sich jedoch nur über Bereiche von der Größenordnung weniger Molekülabstände erstreckt.

Für die Kristallstrukturanalyse mit Röntgenstrahlen liegt nun die Frage nahe, welche Meßgenauigkeiten mit den verschiedenen Röntgeninterferenzverfahren erzielt werden können und ob bzw. wodurch eine grundsätzliche Beschränkung der Meßgenauigkeit besteht. Wie schon eingangs erwähnt wurde, gibt es derzeit noch keine Linsen für Röntgenstrahlen, obwohl ihr Strahlengang beim Übergang zwischen Medien verschiedener Dichte eine Ablenkung erfährt. Dies hat seine Ursache darin, daß die Größe der Dispersion und mithin auch der Brechungsindex für Röntgenstrahlen sowohl dem Quadrat der Wellenlänge dieser Strahlung als auch der Dichte des brechenden Mediums proportional ist. Je größer aber die Wellenlänge und je dichter das Medium sind, um so stärker werden die Strahlen in dem Medium absorbiert, wobei die Wellenlänge in der dritten Potenz und die Dichte linear im Exponenten der den Absorptionsvorgang beschreibenden e -Funktion auftreten. Da außerdem bei den niedrigen Werten für die Brechungsindizes die Linsenkrümmungen sehr groß sein müssen, um einigermaßen brauchbare Brennweiten zu erhalten, ist es derzeit unmöglich, Röntgenstrahllinsen nach dem Muster der optischen Linsen zu erzeugen, die eine wenn auch nur geringfügige Strahleinintensität durchzulassen vermögen. Der einzige Weg, Röntgenstrahlen zu fokussieren, ist also nach wie vor nur durch geeignete Anordnungen der beugenden Medien gegeben, wobei das Ziel der Fokussierung entweder durch Kristalldrehung, Kristallverbiegung oder durch gleichzeitige Anordnung vieler Kristalle erreicht wird. Das älteste Verfahren dieser Art ist die Braggsche Fokussierungsmethode, die zu bekannt ist, um hier näher beschrieben zu werden.

In der Röntgenspektroskopie wurden zahlreiche, teilweise sehr sinnreiche Versuchsanordnungen ersonnen, die es ermöglichen, die Wellenlänge der zu untersuchenden Röntgenstrahlung auch ohne Verwendung einer Optik für Röntgenstrahlen mit möglichster Genauigkeit zu messen. Durch Benutzung möglichst fehlerfreier Spektro-

meterkristalle wird dabei die Eindringtiefe der Röntgenstrahlung in den Kristall sehr verringert, während durch äußerst feine Spalte oder Schneiden aus stark absorbierendem Material eine möglichst große Schärfe der Spektrallinien erreicht wird. Bei der Auswertung der Spektralaufnahmen wird die Brechung der Röntgenstrahlen an der Kristalloberfläche durch eine Korrektur der Braggschen Gleichung berücksichtigt. Mit Präzisionsspektrographen ist es daher möglich, Wellenlängenwerte auf $1 \cdot 10^{-14}$ cm genau anzugeben. Gelegentlich erreichte höhere Meßgenauigkeiten sollen hier nicht weiter erwähnt werden. Natürlich ist es durch Umkehrung der Verfahren der Röntgenspektroskopie ebenso möglich, fehlerfreie größere Einkristalle mit bekannter Röntgenstrahlung zu untersuchen und ihre Gitterabstände mit gleicher Genauigkeit wie die der Wellenlängenangaben zu ermitteln. Wenn dennoch die Gitterabmessungen der meisten kristallinen Körper mit Ausnahme der als Spektrometerkristalle Verwendung findenden wenigen Kristalle nur viel ungenauer bekannt sind, so hat dies seine Ursache in der außerordentlichen Seltenheit größerer fehlerfreier Kristalle. Selbst die besten in der Natur vorkommenden Einkristalle sind bis auf wenige Ausnahmen aus vielen kleineren Bereichen aufgebaut, die gegeneinander kleine Verwerfungen aufweisen (Mosaikkristalle). Verfasser konnte nachweisen, daß äußerlich als Metall-einkristalle erscheinende Individuen häufig gar keine Einkristalle sind, sondern aus sehr vielen kleinen selbständigen Kriställchen bestehen, die einen durch äußere Einflüsse bedingten Richtungseffekt (Textur) zeigen, wodurch sie oberflächlich wie Einkristalle wirken. Im Röntgendiagramm unterscheiden sie sich jedoch grundsätzlich sowohl von idealen Einkristallen als auch von Mosaikkristallen.² In den meisten Fällen ist man daher genötigt, Strukturuntersuchungen an polykristallinen Haufwerken auszuführen, wofür grundsätzlich das bekannte Debye-Scherrer-Verfahren zur Verwendung gelangt.

Eine einfache Überlegung lehrt, daß in der Braggschen Gleichung kleine Änderungen des Netzebenenabstandes d dann die größte Änderung des Glanzwinkels ϑ bedingen, wenn $\vartheta = 90^\circ$ ist. Die größte Genauigkeit ist also für große Glanzwinkel nahe 90° zu erwarten. Diese Erkenntnis führte dazu, Präzisionsuntersuchungen nur nach dem Rückstrahlverfahren auszuführen und auf die Abbildung der Glanzwinkel unter 45° für diese Zwecke überhaupt zu verzichten.

Für Rückstrahluntersuchungen kommen grundsätzlich vier verschiedene Aufnahmeverfahren in Frage, und zwar: Das Planfilm-Rückstrahlverfahren, das Zylinder-Rückstrahlverfahren, das Reglersche Kegel-Rückstrahlverfahren und das Reglersche Ringfilm-Rückstrahlverfahren.³ Um möglichst scharfe Interferenzlinien zu erhalten, müßte das primäre Röntgenstrahlenbündel durch eine möglichst feine Zylinderblende von höchstens einigen hundertstel Millimeter Lumen und verhältnismäßig großer Länge ausgeblendet werden. Eine derartig feine Ausblendung hat aber einerseits den Nachteil, daß nur eine kleine Probenfläche vom Röntgenstrahlenbündel getroffen wird, wodurch meist zu wenig Kriställchen für die Röntgenstrahlenbeugung zur Verfügung stehen, anderseits aber führt eine so feine Ausblendung wegen der geringen Lichtstärke zu außerordentlich langen, praktisch untragbaren Belichtungszeiten. Der erste Nachteil könnte durch Anwendung des Reglerschen Abpinselverfahrens,⁴ bei dem die Probenoberfläche senkrecht zum primären Röntgenstrahlenbündel parallel zu sich selbst verschoben wird, weitgehendst behoben werden. Der Nachteil der geringen Lichtstärke ist jedoch nicht auszuschalten. Daher hat es sich als zweckmäßig erwiesen, auch für Rückstrahluntersuchungen die wesentlich lichtstärkere Fokussierungsmethode³ einzuführen, deren grundsätzliche Wirkungsweise für die vier genannten Verfahren aus den Abb. 1 bis 4 hervorgeht. Man erkennt aus diesen Abbildungen, daß beim Planfilm-Rückstrahlverfahren nur eine Linie exakt fokussiert werden kann, während beim Zylinder- und Kegel-Rückstrahlverfahren zwei Linien zur Fokussierung

gelangen können. Um bei vorgegebener Wellenlänge der Röntgenstrahlung sowie gegebener Kristallstruktur der Probe für einen bestimmten Kegelscheitel-Probenabstand wenigstens eine Interferenzlinie exakt fokussieren zu können, ist es nötig, die Lochblende verschiebbar anzuordnen. Liegen die beiden fokussierten Glanzwinkel nahe benachbart, so werden die dazwischenliegenden Interferenzen im allgemeinen ebenfalls noch genügend exakt fokussiert. Die einwandfreie Fokussierung aller Glanzwinkel liefert jedoch nur das Ringfilm-Rückstrahlverfahren, dessen Wesen es ist, daß sich der zylindrische Aufnahmefilm der Fokussierungskugel im Äquator anschmiegt. Beim Ringfilmverfahren ist allerdings die Probenlage durch den Kameradurchmesser festgelegt und auch eine Verschiebung der in der Filmfläche liegenden Lochblende unmöglich.⁵ Für praktische Strukturuntersuchungen wird der Durchmesser der Lochblende meist nicht kleiner als 0,5 mm gewählt, da sonst die Lichtstärke des Verfahrens zu gering würde.

Das auf die Probe treffende divergente Primärstrahlenbündel entwirft durch die Lochblende der Fokussierungsvorrichtung auf der Probe ein Bild des Brennfleckes der Röntgenröhre. Um die Darstellung nicht zu breit zu gestalten, sollen im folgenden nur die geometrischen Abbildungsverhältnisse für das Ringfilmverfahren näher beschrieben werden, da diesem Verfahren wegen der exakten Fokussierung aller Interferenzlinien die größte Genauigkeit zukommt. Unter der Annahme eines ideal beugenden Kristallpulvers und eines homogen belegten Brennfleckes wäre zu erwarten, daß die Interferenzlinien eine Breite aufweisen, die nur vom Durchmesser der Fokussierungsblende abhängt.

Die Intensitätsverteilung innerhalb der Interferenzlinien müßte in guter Näherung homogen sein, die Schwärzungskurve jeder einzelnen Linie müßte also Trapezform besitzen, wobei die kürzere Paralleelseite des Trapezes durch den Durchmesser der Fokussierungsblende bestimmt wird. Es wären also keine Interferenzlinien, sondern Interferenzbänder zu erwarten, wenn, wie dies in den Abb. 1 bis 4 geschehen ist, das Primärstrahlenbündel auf die Horizontalebene beschränkt wäre. Da jedoch das Primärstrahlenbündel stets räumliche Ausdehnung besitzt, tritt immer eine Überschneidung der von der flächenhaft angestrahlten Probe ausgehenden räumlichen Interferenzkegel ein und es ist zu prüfen, welchen Einfluß diese Überschneidung auf die Schwärzungsverteilung der Interferenzlinien mit verschiedenen Glanzwinkeln hat. Zu diesem Zweck wurden von F. Regler, F. Lihl und F. Günther Untersuchungen an besonders hergestelltem chemisch reinstem Goldpulver vor-

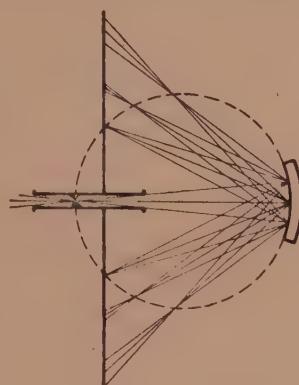


Abb. 1.

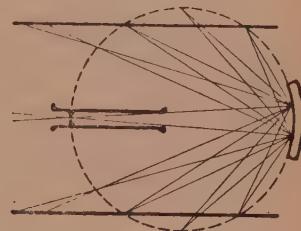


Abb. 2.

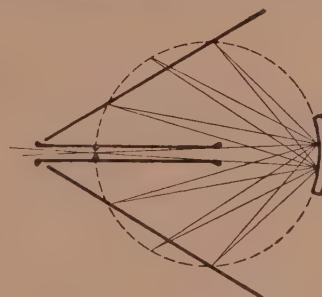


Abb. 3.

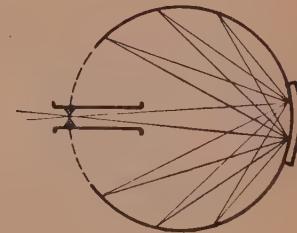


Abb. 4.

genommen, dessen Kristallgröße und Kristallausbildung den röntgenographischen Anforderungen weitgehendst angepaßt waren. Dabei zeigte sich sowohl visuell als auch in den Photometerdiagrammen, daß jede Interferenzlinie ein deutlich ausgeprägtes Schwärzungsmaximum besitzt und daß sich die Lage desselben mit verhältnismäßig hoher Genauigkeit vermessen läßt. Die Erklärung für diese Erscheinung liefert die schon erwähnte Überlegung, daß auch die beiderseits der Äquatorebene ausgehenden Interferenzkegel einen Beitrag zur Schwärzung der Interferenzlinien in der Äquatorebene liefern, wodurch Intensitätsanhäufungen an Stellen entstehen können, die nicht mit den durch die Braggsche Gleichung exakt zu erwartenden Stellen übereinstimmen. Vielmehr weichen die Schwärzungsmaxima von der Linienmitte ab, diese Abweichung ist eine Funktion des Glanzwinkels. Zur näheren Überprüfung der geschilderten Ver-

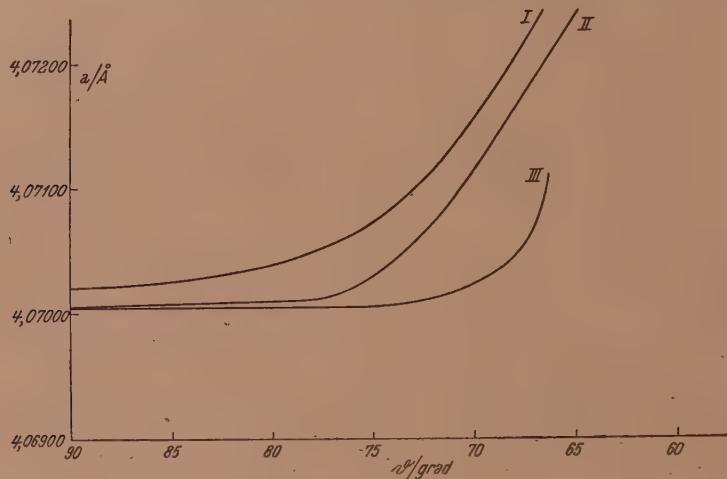


Abb. 5.

hältnisse wurden mehrere Untersuchungen mit Aufnahmekammern ausgeführt, deren Präzision den höchsten Anforderungen entsprach. Um die Linienarmut kubisch-kristallisierender Substanzen zu verringern, ohne die Aufnahmebedingungen durch Röhren- oder Anodenwechsel zu verändern, wurden auch Untersuchungen mit Röntgenröhren mit legierten Anoden, die auf Vorschlag des Verfassers industriell erzeugt wurden, durchgeführt.⁶ Einige Untersuchungsreihen wurden mit abgeschmolzenen Röntgenröhren ausgeführt, um die Brennfleckgröße und -form konstant zu halten, während bei anderen Reihen, die an offenen Röhren ausgeführt wurden, diese Größen absichtlich stark verändert wurden.

Das grundsätzliche Ergebnis dieser Untersuchungsreihen ist den drei Kurvenzügen der Abb. 5 zu entnehmen, wobei die eingezeichneten Kurven durch Mittelung über zahlreiche Meßpunkte entstanden sind. Der Unterschied im Verlauf der Kurvenzüge I und II, bei denen eine Lochblende von 0·6 mm Durchmesser verwendet wurde, ist auf die Veränderung der Fokusgröße und -form zurückzuführen, während bei Kurve III unter Verzicht auf Lichtstärke des Verfahrens ein Blendendurchmesser von 0·1 mm Verwendung fand. Aus diesen Versuchen folgt die wichtige Tatsache, daß es auch für kubisch kristallisierende Substanzen, insbesondere aus Linien mit kleineren Glanzwinkeln, unmöglich ist, aus einer Interferenzlinie einen exakten Wert für die Gitterabmessungen zu erhalten. Aber auch durch Mittelung der aus den einzelnen Interferenzlinien erhaltenen Zahlenwerte erhält man keine exakten Gitterabmessungen, da die zur Mittelung herangezogenen Zahlen nicht nur mit einem zufälligen, sondern auch mit einem systematischen, durch die geometrischen Abbildungsverhältnisse

bedingten Fehler behaftet sind. Dieser Fehler wird um so kleiner, je kleiner der Durchmesser der Fokussierungsblende gewählt wird (Kurve III der Abb. 5). Wegen der Abhängigkeit des Kurvenverlaufes von den Brennfleckabmessungen kann dieser systematische Fehler weder rechnerisch noch durch Eichung eliminiert werden, da stets mit zufälligen zeitlichen Änderungen des Brennfleckes zu rechnen ist, die nicht erfaßt werden können. Der einzige Weg, Gitterkonstanten von kubisch kristallisierten, vielkristallinen Substanzen mit einer Genauigkeit von $\pm 0,0001 \text{ \AA}$ angeben zu können, besteht darin, linienreiche Diagramme, eventuell mit legierten Anoden, aufzunehmen und den nach Art der Kurve in Abb. 5 erhaltenen Kurvenverlauf auf 90° zu extrapolieren.

Gegen dieses Untersuchungsergebnis könnte der Einwand erhoben werden, daß die verwendeten Proben vielleicht nicht exakt kubisch kristallisierten, also zum Beispiel ihr Gitter unter Eigenspannungen stände und somit die durch Beugung an verschiedenen Netzebenenscharen erhaltenen Gitterkonstantenwerte deshalb verschieden würden. Diese Annahme wird jedoch sofort dadurch entkräftet, daß durch Veränderung der Wellenlänge der Röntgenstrahlung die an den einzelnen Netzebenenscharen gebeugten Interferenzen in andere Winkelbereiche gelangen und nun dieselben Gitterkonstantenwerte liefern, wie sie bei anderen Strahlungen von anderen Netzebenenscharen des gleichen Glanzwinkelbereiches erhalten wurden.

Eine weitere Quelle der Unsicherheit der Ergebnisse liegt in dem Umstand begründet, daß nicht nur die geometrischen Abmessungen des Brennfleckes für die Lage des Schwärzungsmaximums innerhalb der Interferenzlinien maßgebend sind, sondern auch die Intensität der von den einzelnen Brennfleckstellen ausgehenden Strahlung. Bekanntlich ist ja der Fokus der Röntgenröhre niemals homogen mit Kathodenstrahlen belegt, da dies die kristalline Rauheit der Glühkathode gar nicht zuläßt. Da sich aber der Brennfleck der Röntgenröhre auf der Probe abbildet, ruft die inhomogene Intensitätsverteilung des Primärstrahlenbündels ebenfalls eine nicht erfaßbare Verschiebung der Schwärzungsmaxima innerhalb der Interferenzlinien hervor.

Nach dem Gesagten kann also bei der Untersuchung polykristalliner Proben aus abbildungsgeometrischen Gründen wegen des Fehlens einer Röntgenstrahlenoptik eine Präzisions-Gitterkonstantenmessung nur durch Extrapolation der für die einzelnen Glanzwinkel erhaltenen Gitterkonstantenwerte auf einen Glanzwinkel von 90° erreicht werden, wobei Voraussetzung ist, daß die Probe im kubischen System kristallisiert. Es liegt daher der Gedanke nahe, auf Absolutmessungen der Gitterkonstante überhaupt zu verzichten und Vergleichsmessungen durchzuführen, indem man die zu untersuchende Probe mit einer dünnen Schicht einer Substanz überzieht, deren Gitterkonstante exakt bekannt ist. Man erhält dann bei geeigneter Wahl der Strahlung und der Eichsubstanz die Linien beider Substanzen auf einem Film. Nun kann man für jeden gemessenen Glanzwinkel aus den genau bekannten Gitterabmessungen der Eichsubstanz — erhalten etwa durch Präzisionsmessungen am Einkristall — die jeweils nötige Korrektur des Glanzwinkels berechnen und kurvenmäßig als Funktion des Glanzwinkels auftragen. Diese Korrektur, angewandt auf die Glanzwinkel der zu untersuchenden Substanz, müßte nunmehr zu einwandfreien Gitterabmessungen dieser Substanz führen.

Die tatsächliche Versuchsdurchführung erfolgte in der Weise, daß die aus geeignet vorbereitetem Steinsalzpulver bestehende Probe mit einer dünnen Schicht des oben erwähnten Goldpulvers bestäubt wurde. Die Dicke der Goldschicht wurde so gewählt, daß die Interferenzlinien des Steinsalz- und die des Goldpulvers mit annähernd gleicher Intensität zur Abbildung gelangten. Steinsalzpulver wurde für diese Untersuchungen gewählt, da ja der Wert für die Gitterkonstante von Steinsalz bei 18° C

mit $a = 5 \cdot 628000 \text{ \AA}$ für alle röntgenspektroskopischen und damit auch für alle Kristallstrukturwerte als Bezugsnormale gilt. Um genügend Interferenzlinien zu erhalten, wurden die Untersuchungen wieder mit einer legierten Anode aus Kupfer-Nickel ausgeführt. Das Ergebnis der auf Steinsalz bezogenen Gitterkonstantenwerte des Goldpulvers, erhalten aus den verschiedenen Interferenzlinien, ist aus Abb. 6 zu entnehmen. Man ersieht deutlich, daß, trotzdem die Goldlinien auf die Steinsalzlinien bezogen wurden, eine Abhängigkeit der erhaltenen Gitterkonstantenwerte vom Glanzwinkel festzustellen ist, wobei die Abweichungen vom idealen Wert mit abnehmendem Glanzwinkel stark wachsen. Als Grund für diese anfangs paradoxe Erscheinung wurde die Eindringtiefe der Röntgenstrahlung in die zu untersuchende Probe gefunden. Während nämlich das Goldpulver nur als dünne Schicht auf die Probe aufgestäubt wurde und daher einen eindeutigen Abstand von der Lochblende besitzt, hatte die

Steinsalzprobe eine größere Dicke, wie ja auch die häufig zu untersuchenden Metallproben ausgedehntere Abmessungen besitzen. Versuche haben nun ergeben, daß bei Einhaltung gleicher Belichtungsbedingungen eine nennenswerte Beeinflussung der Schwärzung verteilt auf den Interferenzlinien von Steinsalz noch erfolgen kann, wenn erst in einer Tiefe von $0 \cdot 05 \text{ mm}$ unter der Probenoberfläche sich ein Kriställchen in gut beugungsfähiger Lage befindet.⁷ Während also der Abstand des bloß aufgestäubten Goldpulvers eindeutig festliegt, ist der Probenabstand des Steinsalzpulvers nicht eindeutig

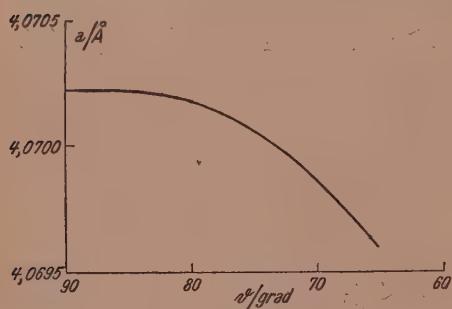


Abb. 6.

angebar. Abstandsungenauigkeiten wirken sich aber bei Interferenzlinien mit einem Glanzwinkel von nahezu 90° kaum merklich aus, während sie um so größeren Einfluß auf die Ergebnisse haben, je kleiner der Glanzwinkel der untersuchten Interferenzlinie ist. Daher stimmen die auf Steinsalz bezogenen Gitterkonstantenwerte von Gold bei großen Glanzwinkeln mit den tatsächlichen Werten gut überein, während sie für kleine Glanzwinkel erhebliche, systematische Abweichungen zeigen. Es ist also auch mit Hilfe einer aufgebrachten Eichsubstanz unmöglich, aus einer Linie der Grundsubstanz deren exakte Gitterkonstante zu errechnen, wenn der Glanzwinkel der Interferenzlinie der Grundsubstanz von 90° merklich abweicht. Zweifellos wären durch Mischung der beiden Pulver in geeignetem Mengenverhältnis diese Fehler zu verkleinern, doch ist ein solches Verfahren für die häufig vorkommenden Fälle der Untersuchung fester Proben nicht anwendbar.

Bei allen im vorigen Abschnitt besprochenen Untersuchungen mittels der verschiedenen Rückstrahlverfahren war Voraussetzung, daß die Röntgenstrahlenbeugung an den zu untersuchenden Kristallgittern ideal erfolgt. Vor allem müssen Gitterblöcke mit einer genügenden Zahl von Streuzentren zur Verfügung stehen, um scharfe Interferenzen zu liefern. Versuche haben ergeben, daß die durch die endlichen Abmessungen der Gitterblöcke bedingte Linienunschärfe dann unterhalb der durch die übrigen Einflüsse beschränkten Meßgenauigkeit liegt, wenn die Kantenlänge der Gitterblöcke 10^{-5} cm überschreitet. Für wesentlich kleinere Gitterblöcke liefert die Linienunschärfe ein wertvolles Verfahren, um die Größe und Form der beugenden Teilchen zu bestimmen. Diffuse Interferenzen entstehen aber auch bei Beugung der Röntgenstrahlung an Gitterblöcken genügender Größe, wenn durch irgendwelche Einflüsse die streng periodische Anordnung der Atome im Gitter gestört wird, so daß die Atomabstände nicht mehr konstant sind, sondern innerhalb gewisser Grenzen Schwankungen unterliegen. Dieser Fall des gestörten Kristallgitters tritt häufig bei

Metallen auf, deren Gitteraufbau durch Kaltverformung oder Härtung in einen Zwangszustand versetzt wurde. Es ist ausgeschlossen, Gitterkonstantenmessungen an solchen Proben mit der oben angegebenen Genauigkeit auszuführen. Die Angabe einer Gitterkonstante, die den Schwankungsbereich der Atomabstände im Gitter unberücksichtigt läßt, ist nicht nur experimentell unmöglich, sondern auch sinnlos. Die Genauigkeit, mit der Gitterkonstantenmessungen an vielkristallinen Proben durchgeführt werden können, hängt grundsätzlich von der Qualität der Beugungsgitter ab. Wenn die Atomabstände selbst innerhalb gewisser Grenzen Schwankungen unterliegen, dann äußert sich dies eben in einer Linienunschärfe, die von selbst die Angabe eines eindeutigen Gitterkonstantenwertes unmöglich macht.

Überschreitet die Kantenlänge der Kristallite die Größe 10^{-3} mm, so treten im Röntgendiagramm vielkristalliner Proben statt der homogen geschwärzten Interferenzlinien diskrete Interferenzpunkte auf, die sich grundsätzlich zu Interferenzlinien verbinden lassen müßten. Man versuchte daher die Homogenisierung der Interferenzlinien durch Drehen der Aufnahmekamera um den Primärstrahl als Achse zu erreichen. Versuche lehren nun, daß die an Stelle der Interferenzlinien auftretenden Interferenzpunkte nicht auf einer der Breite der geometrischen Abbildungsverhältnisse entsprechenden Interferenzlinie liegen, sondern mehr oder weniger stark streuen und ein verhältnismäßig breites Interferenzband erfüllen. Beim Drehen der Aufnahmekamera um den Primärstrahl als Achse entstehen dann häufig statt einer mehrere eng benachbarte Interferenzlinien, so daß es überhaupt unmöglich ist, aus diesen Diagrammen einen exakten Gitterkonstantenwert anzugeben.⁸ Der Grund für das Auftreten diskreter Interferenzpunkte ist trivial, da eben wegen der geringen Zahl der beugenden Kristallite zu wenig Interferenzpunkte vorhanden sind, als daß sie durch Aneinanderreihung eine homogene Interferenzlinie bilden könnten. Da nun die Lage jedes Interferenzpunktes innerhalb der geometrisch bedingten Interferenzlinie von der Lage des Kristalliten abhängt, erhält man durch Drehen der Aufnahmekamera im allgemeinen wohl eine geschlossene Interferenzlinie; die Lage ihres Schwärzungshöchstwertes hängt jedoch von der zufälligen Schwärzungsverteilung der einzelnen Interferenzpunkte ab, die nun nicht mehr statistischen Gesetzen gehorcht und daher auch nicht mehr erfaßt werden kann. Auch ohne Streuung der Interferenzpunkte ist also die Lage des Schwärzungsmaximums bei der Untersuchung grobkristalliner Proben undefiniert und daher eine Präzisionsbestimmung der Gitterkonstante ausgeschlossen. Theoretisch wäre es allerdings auch möglich, schon durch die innerhalb der geometrisch bedingten Linienbreite liegenden Interferenzpunkte mit gedrehter Kamera eine Linienvervielfachung zu erhalten, da ja die Größe der Interferenzpunkte nicht vom Blendendurchmesser allein, sondern auch von der Größe der spiegelnden Kristallfläche abhängt, wenn letztere kleiner als der Blendendurchmesser ist. Daher können einige solche kleine intensiv geschwärzte Punkte bei Drehung der Kamera leicht konzentrische Interferenzkreise erzeugen, die jedoch nur innerhalb des geometrisch bedingten Bereiches liegen können, wenn die Linienbreite nicht durch Gitterstörungen verbreitert sein soll. Eine gewisse Verbreiterung der Interferenzlinien ist wohl an sich durch das Auflösungs- bzw. Ansprechungsvermögen des Gitters bedingt und wird durch den Lorentz-Faktor berücksichtigt. Diese Verbreiterung ist aber nur sehr gering, so daß die geometrischen Abbildungsbedingungen zur Beschreibung der Breite der Interferenzlinien ausreichen. Um so unerklärlicher erschien daher die Tatsache, daß ungestörte Kristallgitter einheitlicher Zusammensetzung Interferenzpunkte liefern, deren Streuung weit über die geometrisch bedingte Interferenzpunktlage hinausgeht. Diese Punkte liefern dann gegebenenfalls bei gedrehter Aufnahmekamera statt einer Interferenzlinie mehrere Linien, deren Abstand durch die Abbildungsgeometrie nicht mehr erklärt werden kann.

Nachdem von verschiedenen Seiten Erklärungsversuche für diese Linienvervielfachung gegeben wurden, die alle bei näherem Zusehen nicht befriedigen konnten, gelang dem Verfasser der Nachweis, daß die Linienvervielfachung nur bei Röntgenstrahlenbeugung an großer kristallisierenden Substanzen beobachtbar ist und daß ferner der Bereich der Abweichung von der geometrisch bedingten Linienbreite die gleiche Größenordnung hat, als er unter Berücksichtigung der Brechung der Röntgenstrahlen beim Eintritt in bzw. beim Austritt aus der Probe haben müßte.^{4,9} Dieser Überlegung liegt der Gedanke zugrunde, daß eine Probe niemals eben ist, sondern daß die Kriställchen, wie dies besonders durch elektronenmikroskopische Untersuchungen bewiesen wurde, aus der Probe herausragen. Wird nun ein solches Kriställchen von dem ein- oder austretenden Strahlenbündel streifend getroffen, so erfährt dasselbe eine Brechung, wodurch es aus seiner nur durch die Beugung bedingten Richtung abgelenkt wird. Die Größe der durch diesen Vorgang hervorgerufenen Ablenkung ist rechnerisch erfaßbar, wobei es sich zeigt, daß stets alle beobachteten Interferenzpunkte, die durch Beugung monochromatischer Strahlung entstehen, innerhalb des berechneten Bereiches zu liegen kommen. In diesem Fall wird also die erreichbare Meßgenauigkeit durch die Brechung der Röntgenstrahlen beschränkt und dadurch das Auflösungsvermögen des Verfahrens unabhängig von der Präzision der Aufnahmekamera beeinträchtigt. Ebenso wie im optischen Gebiet das mikroskopische Auflösungsvermögen durch die Beugung der Lichtstrahlen an den Dingpunkten begrenzt wird, ist also im Röntgengebiet die Meßgenauigkeit durch den Brechungseffekt begrenzt, wenn man Proben untersucht, deren Kristalle eine bestimmte Größe überschreiten. Der Beweis, daß tatsächlich ein Brechungseffekt vorliegt, konnte experimentell dadurch erbracht werden, daß die Größenordnung der Streuung der Interferenzpunkte auch für Interferenzen mit kleinen Glanzwinkeln erhalten bleibt, während ja die Linienbreite wegen der Abhängigkeit des Auflösungsvermögens vom Glanzwinkel mit abnehmendem Glanzwinkel stark sinkt.

Gegen diese Vorstellung wurde jedoch der Einwand erhoben, daß trotz der einwandfreien strahlelementrischen Übereinstimmung die Intensität der gestreuten Interferenzpunkte viel geringer sein müßte, als sie tatsächlich ist, da die Strahlen beim Eindringen in den Kristall und Beugung im Innern desselben starke Absorptionsverluste erleiden müßten.¹⁰ F. Lihl konnte nachweisen, daß die von Regler auf Dispersionseffekte zurückführbare Streuung der Interferenzpunkte auch ohne nennenswerte Intensitätsverluste möglich ist, wenn der Strahl an einer Kristalloberfläche total reflektiert und dann an einer Netzebenenschar gebroigt wird, ohne wesentlich in den brechenden Kristall einzudringen.¹¹ Die Reflexion kann natürlich vor oder nach der Beugung oder auch in beiden Fällen erfolgen. Da sowohl ein nennenswerter Brechungseffekt als auch die Totalreflexion einen sehr spitzen Auftreffwinkel des gebrochenen Strahles auf die brechende Kristallfläche zur Voraussetzung haben und die Totalreflexion der Röntgenstrahlen aus der Tatsache folgt, daß ihr Brechungsindex kleiner als Eins ist, erfahren durch die Lihlsche Abänderung die von Regler entwickelten Vorstellungen keine grundsätzliche Änderung.

Es ist von vornherein klar, daß die Bedingungen für das Zustandekommen stark abgelenkter Interferenzpunkte sehr ungünstig sind, da einerseits Totalreflexion nur unter sehr spitzen Auftreffwinkeln stattfindet und anderseits die Beugung der Röntgenstrahlen an größeren Kriställchen eine seltene Erscheinung ist. Für die Entstehung stärkerer Ablenkung müssen nun die beiden seltenen Effekte gleichzeitig auftreten. Die Wahrscheinlichkeit, daß stark gestreute Interferenzen einen nennenswerten Beitrag zur Schwärzung der Interferenzlinien liefern, ist nach dem Gesagten nur sehr gering, weshalb der Effekt bei Beugung der Röntgenstrahlen an feinkörnigen Proben, bei denen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen erst sinnvoll werden, nicht ins Gewicht

fällt.^{12,13} Bei grobkörnigen Proben mit nur wenig Beugungszentren kann jedoch ohne weiteres auch der seltene Fall der starken Streuung eines Interferenzpunktes auftreten und gleichzeitig eine Zahl der wahrscheinlicheren Interferenzlagen fehlen, so daß durch den an sich unwahrscheinlicheren Vorgang dennoch eine nennenswerte Beeinflussung der Lage der Interferenzpunkte erfolgen kann. Nach Regler kann man daher die störende Wirkung der Dispersion durch Erhöhung der Beugungszentren verringern bzw. ausschalten. Zu diesem Zweck führte der Verfasser das sogenannte Abpinselverfahren ein, bei dem durch Parallelverschiebung der Probenoberfläche senkrecht zum primären Röntgenstrahlenbündel eine wesentliche Vergrößerung der Zahl der beugenden Kristalle erreicht wird. Versuche haben ergeben, daß durch das Abpinseln die Linienvervielfachung aufgehoben wird. Da jedoch durch das Abpinseln leicht ein Richtungseffekt der Kristalle vorgetäuscht werden kann, empfiehlt es sich, die Aufnahmekamera trotz des Abpinselns um den Primärstrahl zu drehen. Außerdem wird durch das Abpinseln das richtige Intensitätsverhältnis zwischen den Interferenzlinien verschiedener Indizierung erreicht, das sonst bei der Untersuchung grobkörniger Proben meist nicht erhalten wird.¹⁴

Zusammenfassend wurde in vorliegender Abhandlung versucht, zwischen dem Verhalten der Röntgenstrahlen und dem der Lichtstrahlen Parallelen zu ziehen und zu zeigen, daß zwischen den beiden Strahlenarten kein grundsätzlicher, sondern nur ein zahlenmäßig bedingter Unterschied besteht. Wenn auch im Gebiet der Röntgenstrahlen die Interferenzerscheinungen die geometrisch optischen Betrachtungen anfangs in den Hintergrund treten lassen, so besitzen diese Überlegungen dennoch für die Auswertung von Präzisionsaufnahmen erhebliche Bedeutung. Für die vollständige Betrachtung des Strahlenganges der Röntgenstrahlen dürfen die Brechungerscheinungen derselben ebensowenig vernachlässigt werden, wie im optischen Gebiet die Berücksichtigung der Interferenzerscheinungen des Lichtes bei exakter Beschreibung der Abbildungsverhältnisse außer acht gelassen werden darf.

Literaturverzeichnis:

A. Bücher und zusammenfassende Darstellungen.

W. Bothe u. F. Kirchner: Handb. d. Physik, Bd. 23, Teil 2, 2. Aufl. Berlin 1933. — M. u. L. de Broglie, Einführung in die Physik der Röntgen- und Gammastrahlen. Leipzig 1930. — J. Eggert u. E. Schiebold: Erg. d. techn. Röntgenk. Bd. 1—6. Leipzig 1930, 1931, 1933, 1934, 1935, 1938. — P. P. Ewald: Kristalle und Röntgenstrahlen. Berlin 1923. — H. Fuhs, J. Konrad u. F. Regler: Grenzstrahl-Hauttherapie. Berlin u. Wien 1931. — R. Glocker: Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. 2. Aufl. Berlin 1936. — E. Grimsehl u. R. Tomaschek: Lehrb. d. Physik. Bd. 2, Teil 2. Leipzig-Berlin 1934. — F. Halla u. H. Mark: Leitfaden für die röntgenographische Untersuchung von Kristallen. Leipzig 1937. — F. Kirchner: Handb. d. Experimentalphysik. Bd. 24, Teil 1. Leipzig 1930. — A. E. Lindh: Handb. d. Experimentalphysik. Bd. 24, Teil 2. Leipzig 1930. — F. Regler: Grundzüge der Röntgenphysik. Berlin u. Wien 1937. — F. Regler: Verformung und Ermüdung metallischer Werkstoffe im Röntgenbild. München 1939. — E. Schiebold: Die Laue-Methode. Leipzig 1932. — A. Schleede u. E. Schneider: Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse. 2 Bände. Berlin u. Leipzig 1929. — M. Siegbahn, Spektroskopie der Röntgenstrahlen. 2. Aufl. Berlin 1931. — F. Wissak: Röntgenstrahlen. Berlin 1943.

B. Einzelveröffentlichungen.

- ¹ F. Regler: Die Optik der Röntgenstrahlen. Strahlentherapie **73**, 273—279 (1943). —
- ² F. Regler, M. v. Schwarz u. F. Lihl: Zerstörungsfreie röntgenographische Korngrößenbestimmung. Metallwirtschaft **31/34**, 281—284 (1944). — ³ F. Regler: Das Ringfilm-Rückstrahlverfahren. Z. techn. Physik **XXIV**, 291—296 (1943). — ⁴ F. Regler: Über die Ursache der Linienvervielfachung bei Röntgen-Rückstrahlauflnahmen vielkristalliner Haufwerke. Metallwirtschaft **17—18**, 249—255 (1942). — ⁵ F. Regler: Zur Auswertung von Röntgen-Rückstrahlauflnahmen. Archiv für Metallkunde. I. Jahrg. Heft 1 S. 11—14 (1946). — ⁶ F. Regler: Röntgenröhren mit legierten Anoden in der zerstörungsfreien Feingefügeuntersuchung. Die Abnahme **7**, 5—8 (1944). — ⁷ F. Regler: Vorläufige Mitteilung über ein neues Verfahren zur Messung der Dicke dünner

Überzugsschichten mittels Röntgen-Rückstrahlauflaufnahmen. Metallwirtschaft **31/34**, 284—286 (1944). — ⁸ E. Brandenberger: Schweizer Archiv **4**, 354—356 (1938). — ⁹ F. Regler: Über die kantige Begrenzung von Röntgeninterferenzlinien bei Untersuchungen an vielkristallinen Proben. Metallwirtschaft **19/20**, 273—279 (1942). — ¹⁰ A. Kochendörfer: Z. f. Krist. **105**, 10—22 (1943). — ¹¹ F. Lihl: Über die bei Röntgeninterferenzlinien auftretenden Erscheinungen der Interferenzpunktstreumung und der kantigen Linienbegrenzung. Metallwirtschaft **23**, 300—301 (1944). — ¹² F. Lihl: Ein Beitrag zur Gitterkonstantenbestimmung und röntgenographischen Spannungsmessung an grobkristallinen Werkstoffen. Archiv f. Metallkunde **1**, 25—31 (1946). — ¹³ F. Wever u. H. Möller: Mitt. Kais.-Wilh.-Inst. Eisenforschung. Düsseldorf **15**, 59—69 (1933). — ¹⁴ F. Regler: Zerstörungsfreie röntgenographische Feingefügeuntersuchung an grobkristallinen Werkstoffen. Z. f. Metallkunde **35**, 202—205 (1943).

(Eingegangen am 23. September 1947.)

Der Mechanismus der Turbulenz.

Von M. Ledinegg, Wien.

Mit 8 Textabbildungen.

1. Allgemeiner Überblick.

Über die Turbulenz wurden bereits sehr viele Arbeiten veröffentlicht und viele namhafte Physiker, Mathematiker und Strömungsforscher haben sich mit diesem Problem befaßt. Hierbei sind vor allem zwei Fragen untersucht worden, und zwar die Ursachen der Entstehung und die Vorgänge bei bereits ausgebildeter Turbulenz.¹ In diesen Arbeiten herrscht über beide Vorgänge keine einhellige Ansicht. Ihre Entstehung wird von einem Teil der Forscher der turbulenten Mischbewegung im Rohr zugeschrieben,² das ist eine regellose, sich der Hauptbewegung überlagernde Quer- und Längsbewegung von Wasserteilchen. Die Frage, wieso diese entsteht und aufrechterhalten wird, kann allerdings hierbei nicht als gelöst angesehen werden. Von anderen Seiten wird Wirbelbildung als Ursache angesehen,³ wobei gleichfalls über deren Wesen nichts Genaues gesagt wird. Vielfach wird von den hydrodynamischen Grundgleichungen ausgegangen und nach entsprechender Anwendung auf das Problem versucht, hieraus Schwingungsvorgänge abzuleiten,⁴ was auch zu bestimmten Ergebnissen führt. Vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie wird ebenfalls das Turbulenzproblem behandelt.⁵ Auch Untersuchungen, welche nur unter Benützung der Kontinuitätsgleichung zu Resultaten gelangen, wurden durchgeführt.⁶

Alle diese Untersuchungen gehen jedoch auf das eigentliche Wesen der Turbulenz, d. h. auf ihren Mechanismus nicht näher ein. Sie beschreiben daher wohl vielfach richtig die äußeren, durch die Turbulenz hervorgerufenen Erscheinungsformen, wie vor allem die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr, erklären aber keineswegs befriedigend wie die Turbulenz entsteht und wie sie aufrechterhalten wird. Dies mag auch daran liegen, daß über das Wesen der turbulenten Vorgänge im Detail so gut wie keine Versuchsunterlagen vorliegen. Dagegen wurden über die Geschwindigkeitsverteilungen im Rohr bei turbulenten Strömung, über die dadurch hervorgerufenen Druckverluste

¹ F. Kračmar: Das Turbulenzproblem. Österr. Ingenieur-Arch. **1**, 130 (1946). (Gleichzeitige ausführliche Literaturübersicht.)

² L. Prandtl: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. Ver. dtsch. Ing. **1933**, 105.

³ G. J. Taylor: The transport of Vorticity and heat through fluid in turbulent motion. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **135**, 685, 702 (1932).

⁴ F. Magyar und F. Kračmar: Physik. Z. **1933**, 241. — W. Tollmien: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl., Fachgr. I, N. F. **1**, 79 (1935).

⁵ H. Gebelein: Turbulenz. Berlin. 1935.

⁶ F. Magyar: Z. Physik **1944**, 640.

und dergleichen außerordentlich viele und sehr sorgfältige Versuche durchgeführt.⁷ Naturgemäß sind auch Versuche, die sich mit dem Detail der Turbulenz befassen, äußerst schwierig, denn es handelt sich um mikroskopische, zeitlich sehr schnell verlaufende Vorgänge.

Über die Turbulenzvorgänge kann nur als feststehend angenommen werden, daß diese entweder von einer Störung im Rohreinlauf oder wenn diese nicht vorhanden ist, von einer Wandrauhigkeit ausgehen. Vom Entstehungspunkt aus schreitet die Turbulenz ins Innere fort, bis sie eine gewisse Strecke unter ersterem das ganze Rohr erfüllt. Bei Turbulenz findet eine dauernde Vermischung der Stromfäden statt, wie festgestellt werden kann, wenn Farbflüssigkeit an einer Stelle eingebracht wird. In einer gewissen Entfernung, stromabwärts, erscheint der ganze Flüssigkeitsinhalt gleichmäßig gefärbt. Die Farbteilchen haben also eine Bewegung ausgeführt, die den ganzen Rohrquerschnitt umfaßt hat. Aus Versuchen kann angenommen werden, daß diese Vorgänge vor allem durch Wirbelbildungen verursacht werden.⁸ Die theoretische Behandlung der Turbulenz unter Einführung von Wirbelfeldern wurde zuerst von F. Magyar durchgeführt.⁹

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, aus einer Theorie über die inneren Vorgänge der Turbulenz heraus das Problem zu behandeln. Es wird die Entstehung der Turbulenz Wirbeln zugeschrieben, welche sich an der Wand, die auch beim glatten Rohr mikroskopisch betrachtet ein außerordentlich zackiges Gefüge¹⁰ hat, bilden. Diese Wirbeln haben im Augenblick ihres Entstehens, gegen die Hauptströmung u eine bestimmte Relativgeschwindigkeit in axialer Richtung, denn u hat an der Entstehungsstelle bereits einen bestimmten Wert, während der Wirbel im Zeitpunkt des Ablösens die Absolutgeschwindigkeit 0 hat. Ein solcher Wirbel gelangt nun in das Geschwindigkeitsfeld von u , in welchem diese Geschwindigkeit stark mit der Wandentfernung zunimmt. Wenn man sich die Achse des Wirbels beispielsweise senkrecht zu u erstreckt denkt, wird er demnach auf der wandzugekehrten und wandabgekehrten Seite von stark verschiedenen Geschwindigkeiten umströmt, wodurch auf den Wirbel eine Kraftwirkung gegen das Rohrinnere entsteht, die eine Radialbewegung zur Folge hat. An festen Körpern treten ähnliche Kräfte auf, z. B. bei Erhaltung der Stabilität einer in einem Luftstrom schwebenden Kugel oder beim Hängen eines Gummiballes in einem schrägen Luftstrom.¹⁰ Anderseits wird die Hauptströmung u infolge der Zähigkeitseinwirkung bestrebt sein, dem Wirbel dieselbe Geschwindigkeit zu verleihen, welche sie selbst hat. Er erreicht sie aber nicht, denn die radiale Bewegung bringt den Wirbel in einen immer höheren Geschwindigkeitsbereich von u , woraus Trägheitskräfte entstehen, deren Richtung entgegengesetzt u ist, die also bremsend wirken.

Ferner wird angenommen, daß im Verlauf der radialen Fortbewegung des „Wirbelstromes“ gleichzeitig derselbe sich auflöst. Dies bedeutet, daß die Rotation der Wirbelfäden abgebremst wird, z. B. durch Zusammentreffen solcher entgegengesetzter Drehrichtung, wodurch deren wirbelnde Flüssigkeitsmasse in normal strömende übergeht.

Durch Betrachtung der Kraftwirkungen an solchen Wirbeln, ferner durch logische Betrachtung über die Auflösung der Wirbelmasse und damit verbundener Vorgänge gelingt es, die bekannte logarithmische Geschwindigkeitsverteilung im Rohr ab-

⁷ Nikuradse: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forschungsh. 356 (1932).

⁸ Schiller: Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung. Z. angew. Math. Mechan. 36 (1934).

⁹ F. Magyar: Z. angew. Math. Mechan. 157 (1932).

¹⁰ Eck: Technische Strömungslehre, S. 61. Berlin. 1941.

zuleiten.² Für die Strömung in der Nähe der Rohrmitte, wo die logarithmische Verteilung nicht mehr genau gilt, ergibt die dargelegte Theorie die seit langem bekannte experimentell gefundene Geschwindigkeitsverteilung von Darcy.²

Der Zweck einer Arbeit, die davon ausgeht, die Turbulenz von der Seite ihres inneren Wesens heraus zu untersuchen, mag darin liegen, daß es dadurch möglich ist, den Turbulenzmechanismus von der Rohrströmung auf beliebige andere Strömungen, z. B. um Platten, Tragflügel u. dgl., zu übertragen und auf diese Weise den Reibungswiderstand rechnerisch zu ermitteln. Vor allem jedoch für die Erforschung des Wärmeüberganges ist die Kenntnis des Turbulenzmechanismus wichtig. Arbeiten, welche sich mit der Ableitung ersteren aus der Turbulenz befassen, ohne ihr inneres Wesen entsprechend geklärt zu haben, können nicht ganz befriedigen.^{11, 12, 13}

2. Kräfte am Wirbel.

A. Erzeugung der Wirbelbewegung.

Es möge eine Strömung betrachtet werden, deren Geschwindigkeit W zwar gleichgerichtet ist, aber mit steigendem Wandabstand zunimmt. Es sei dies durch Kurve 1 in Abb. 1 dargestellt und entspricht der Strömung im Rohr.

Senkrecht zur Strömung erstrecke sich ein Wirbelfaden vom Radius s und werde ersterer zunächst als ruhend angenommen, so daß er in Achsrichtung von der Geschwindigkeit W angeströmt werde. Hingegen wird er auf der wandabgekehrten Seite von einer größeren, auf der zugekehrten Seite von einer kleineren Geschwindigkeit umströmt. Es treten, wenn der Wirbel sich in Hinblick auf die Beeinflussung der Geschwindigkeit W wie ein starrer Zylinder verhalte, an seinem Umfang Unterdrücke auf, welche auf der wandabgekehrten Hälfte eine resultierende Kraft P_A , gegenüber einer Kraft P_B hervorrufen.

Wäre die Anströmgeschwindigkeit W konstant, ist bekanntlich $P_A = P_B$. Für diesen Fall ergibt die Theorie¹⁴ mit dem spezifischen Gewicht γ und einer Konstanten C

$$P_A = \frac{C \cdot s \cdot \gamma \cdot W^2}{2g}. \quad (1)$$

Tatsächlich nimmt aber die Anströmgeschwindigkeit vom Wert W in der Höhe des Mittelpunktes auf den Wert $W + \Delta W$ in der Höhe des Umfanges nach rechts zu bzw. auf den Wert $W - \Delta W$ nach links ab (Abb. 1). Betrachtet man nun mehr

Abb. 1. Strömung um einen Zylinder bei ortsveränderlicher Anströmgeschwindigkeit.

Abb. 2. Relative Anströmgeschwindigkeit, wenn sich der Beobachter im Wirbelmittelpunkt M befindet.

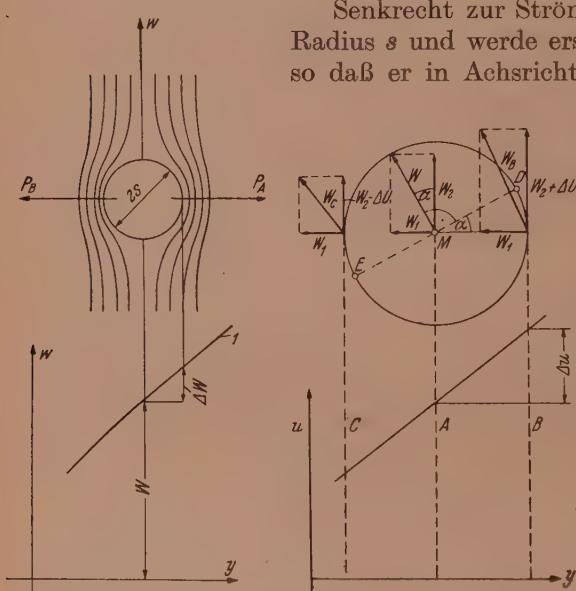
Höhe des Mittelpunktes auf den Wert $W + \Delta W$ in der Höhe des Umfanges nach rechts zu bzw. auf den Wert $W - \Delta W$ nach links ab (Abb. 1). Betrachtet man nun mehr

¹¹ Reichhardt: Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. Z. angew. Math. Mechan. 297 (1940).

¹² G. D. Mattioli: Theorie der Wärmeübertragung in glatten und rauen Rohren. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 149 (1940).

¹³ E. Hofmann: Über die Gesetzmäßigkeiten der Wärme- und Stoffübertragung auf Grund des Strömungsvorganges im Rohr. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 159 (1940).

¹⁴ Müller: Mathematische Strömungslehre, S. 80. Berlin. 1928. (Nach einigen Umformungen.)



diese Zuströmgeschwindigkeiten für die „mittleren“ Kraftwirkungen nach rechts und links maßgebend, erhält man:

$$P_T = P_A - P_B = \frac{C \gamma s}{2 g} \cdot [(W + \Delta W)^2 - (W - \Delta W)^2]. \quad (2)$$

Der Unterschied gegenüber dem starren Zylinder sowie die gewisse Willkür in der Wahl der für die Kraftwirkungen maßgebenden „mittleren Geschwindigkeiten“ möge durch entsprechende Wahl der Konstanten C berücksichtigt werden.

Durch Zusammenfassung der Gl. (2) ergibt sich schließlich die auf den Wirbel wirkende Kraft zu

$$P_T = \frac{2 C \gamma s W \Delta W}{g}. \quad (3)$$

Es mögen nun die Verhältnisse auf die Strömung in einem zylindrischen Rohr übertragen werden. Den Wirbel stelle man sich zunächst zur Vereinfachung abweichend von der Wirklichkeit aus koaxialen Elementen zusammengesetzt vor. Diese bewegen sich gegen die Rohrachse, d. h. radial mit der Geschwindigkeit W_1 und relativ zur Hauptströmung, also axial mit der Geschwindigkeit W_2 . Die Wirbel bleiben demnach wegen W_2 gegen die Hauptströmung zurück. In Abb. 2 ist ein Schnitt durch den Wirbelfaden gezeichnet. Sein Mittelpunkt hat gegenüber der Hauptströmung die Geschwindigkeiten W_1 und W_2 bzw. W . Befindet sich ein Beobachter im Mittelpunkt des Wirbels, wird er daher die dargestellte entgegengesetzte zu W gerichtete Anströmung feststellen. Dies gilt aber nur solange er Punkte der Flüssigkeit betrachtet, welche auf der Geraden A liegen. Verlegt er die Beobachtung auf Punkte, die auf der Geraden B liegen, wird eine Relativgeschwindigkeit W_B in Erscheinung treten, deren horizontale Komponente wieder W_1 , die vertikale Komponente hingegen $W_2 + \Delta u$ ist. Δu ist hierbei die Zunahme der Hauptgeschwindigkeit beim Fortschreiten um die Länge s nach rechts. Analog wird beim Fortschreiten nach links die vertikale Komponente auf den Betrag $W_2 - \Delta u$ abgenommen haben. Da es sich bei Δu um einen kleinen Betrag handelt, kann hierfür angenähert $\Delta u = \frac{du}{dy} \cdot s = u' \cdot s$ gesetzt werden.

Der Wirbel wird also nicht mehr von einer genau parallelen Geschwindigkeit angetrieben werden. Wenn dies nochmals in Abb. 3 dargestellt sei, so ist die zum Mittelpunkt gerichtete Anströmgeschwindigkeit wieder W .

Die gegen den Punkt D, Abb. 2, gerichtete Anströmgeschwindigkeit hat jedoch die Komponenten W_1 und $W_2 + u' s \cos \alpha$ (Abb. 3), also die resultierende Geschwindigkeit W_D . Ähnlich ergebe sich für den Punkt E der Abb. 2 die Anströmgeschwindigkeit W_E . Berechnet man die Projektion der vom Wirbelmittelpunkt bis D stattfindenden Geschwindigkeitszunahme auf die Richtung von W , ergibt sich $u' \cdot s \cdot \cos^2 \alpha$, wie in Abb. 3 dargestellt ist. Unter Benutzung dieses Ausdruckes zur Näherungsweise Berechnung von ΔW in Gl. (3), ferner mit Einführung von $W = \frac{W_2}{\cos \alpha}$ laut Abb. 3 erhält man schließlich für die auf den Wirbel je Meter Länge senkrecht zu W gerichtete treibende Kraft P_T den Ausdruck

$$P_T = \frac{2 C \gamma s^2 u' W_2 \cos \alpha}{g}. \quad (4)$$

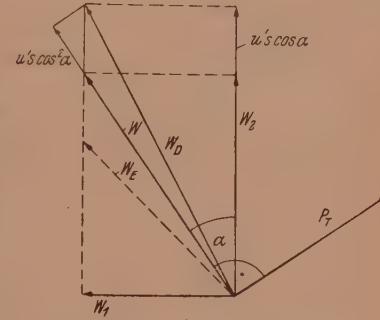


Abb. 3. Relative Anströmgeschwindigkeit der Punkte D, M, E in Abb. 2.

B. Zähigkeitskraft.

Da der Wirbel gegenüber der Hauptströmung die Relativgeschwindigkeit W hat, tritt zwischen beiden eine Zähigkeitskraft auf. Denkt man sich den Wirbel wieder durch einen Zylinder idealisiert, ergibt die Theorie eine Zähigkeitskraft pro Meter Länge¹⁵ mit η und μ als Zähigkeit und kinematische Zähigkeit

$$P_z = \frac{2}{\pi \left(\ln \frac{8\mu}{2sW} - 0,0772 \right)} \cdot \eta \cdot W. \quad (5)$$

Der Nenner ist keine Konstante. Er möge durch eine Funktion C_2 dargestellt werden, so daß sich für die Zähigkeitskraft ergibt:

$$P_z = C_2 \eta W. \quad (6)$$

Die Voraussetzung der Anströmrichtung senkrecht zur Wirbelachse trifft, wie weiter unten dargelegt wird, auch nicht zu und wird später fallen gelassen. Die daher erforderliche Angleichung an die wirklichen Verhältnisse soll in (4) durch den Wert C in (6) durch C_2 erfolgen.

C. Trägheitskraft.

Der Wirbelfaden ist infolge seiner Relativgeschwindigkeiten Trägheitskräften ausgesetzt, welche sowohl in axialer als radialer Richtung Komponenten P_{B2} und P_{B1} besitzen.

Infolge seiner radialen Bewegung kommt der Wirbel in den Bereich immer größerer Hauptströmgeschwindigkeiten u . Da er gegen letztere die Relativgeschwindigkeit W_2 hat, wird demnach seine absolute Geschwindigkeit in axialer Richtung ($u + W_2$) betragen, wobei W_2 ein negativer Wert ist. Die daraus resultierende Massenkraft ergibt sich aus dem Grundgesetz Kraft = Masse × Beschleunigung zu

$$P_{B2} = \frac{s^2 \pi \gamma}{g} \frac{d}{dt} (u + W_2) = \frac{s^2 \pi \gamma}{g} \frac{d}{dy} (u + W_2) \frac{dy}{dt} \quad (7)$$

mit

$$\frac{dy}{dt} = W_1 \quad (8)$$

findet man:

$$P_{B2} = \frac{s^2 \pi \gamma}{g} W_1 (u' + W_2'). \quad (9)$$

Nähere Untersuchungen zeigen, daß W_2 , in Wandnähe, mit zunehmender Wandentfernung abnimmt, W_1 zunimmt. Aber bereits die Anschauung führt zum gleichen Schluß. Denn im Augenblick des Entstehens hat der Wirbel in axialer Richtung die absolute Geschwindigkeit Null. Demnach ist W_2 gleich der Hauptströmungsgeschwindigkeit u an derselben Stelle. Es ist naheliegend, daß nach dem Losreißen des Wirbels und zunehmender Wandentfernung y die absolute axiale Wirbelgeschwindigkeit sich an u anzugeleichen bestrebt ist, W_2 also kleiner wird.

Die Radialgeschwindigkeit W_1 ist aber im Augenblick des Abreißens Null, kann also nur zunehmen.

In (7) und (9), ebenso wie in allen folgenden Gleichungen ist das Vorzeichen von W_1 , W_2 , W_1' , W_2' dadurch offen gelassen, daß es positiv eingeführt wurde. Bei Berücksichtigung des weiter oben Gesagten ist jedoch festzuhalten, daß es nur bei W_1 , W_1' , W_2' um positive, bei W_2 aber um eine negative Größe handelt.

Mit (9) ist die Massenkraft in axialer Richtung berechnet. Die in radialer Richtung wirkende resultiert aus der Änderung der Radialgeschwindigkeit W_1 pro Zeiteinheit und ergibt sich analog zu (9) wie folgt:

$$P_{B1} = \frac{s^2 \pi \gamma}{g} W_1 W_1'. \quad (10)$$

Die Kraft P_B setzt sich dann aus P_{B1} und P_{B2} zusammen.

¹⁵ Handbuch der Physik, Bd. VII: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

D. Zusammensetzung der Kräfte.

Die Kräfte P_T , P_Z und P_B müssen zusammengesetzt ein geschlossenes Dreieck ergeben, wie Abb. 4a zeigt. In vektorieller Schreibweise mit Kurrentbuchstaben statt lateinischen ergibt sich also:

$$\mathfrak{P}_T + \mathfrak{P}_Z + \mathfrak{P}_B = 0. \quad (11)$$

Die Relativgeschwindigkeit W ist in der Abbildung gleichfalls eingetragen. Die Kraft \mathfrak{P}_Z ist parallel, die Kraft \mathfrak{P}_T senkrecht zu dieser. Die horizontale Komponente von \mathfrak{P}_B hat die gezeichnete Richtung, wenn die Geschwindigkeit W_1 , wie weiter oben angenommen wurde, mit steigendem Wandabstand zunimmt.

3. Kräfte auf die Flüssigkeit.

A. Reaktionskraft auf die Flüssigkeit.

Es möge nun ein Volumenelement betrachtet werden, welches durch zwei im Radius um dy verschiedene coaxiale Zylinder von der Länge 1 gebildet ist.

Denkt man sich als vorläufige Hilfsvorstellung die tangentiellen Wirbelemente aneinandergefügt, werden eine bestimmte Zahl koaxialer Wirbelringe entstehen, die in einer radialen Schnittebene des Volumenelementes eine entsprechende Zahl von Spurpunkten besitzen, Abb. 5. Die Zahl der Wirbelringe, die je Zeiteinheit die äußere Mantelfläche des Volumenelementes passieren, d. h. eine Erzeugende schneiden, sei Z . Deren Zahl je Zeitelement ist dann $Z \cdot dt$. Hierbei sind sie um die Strecke dy radial nach innen gewandert. Die Zahl der Spurpunkte in der in Abb. 5 punktierten radialen Schnittebene ist

$$d\Theta = Z \frac{dt}{dy} \cdot dy = \frac{Z}{W_1} dy. \quad (11a)$$

Die Länge der insgesamt im Volumenelement vorhandenen Wirbel ist dann

$$2(r-y)\pi d\Theta = 2(r-y) \frac{\pi Z}{W_1} dy.$$

Die auf den Wirbel wirkende Kraft P_T und P_Z wirkt infolge von Aktio und Reaktio umgekehrt gerichtet, aber in gleicher Größe auf die Flüssigkeit. Als Ersatz für erstere kann auch deren Resultierende, d. i. P_B eingeführt werden (Abb. 4a). Insgesamt erhält man dann als Kraft im Raum eines Volumenelementes, wenn beachtet wird, daß P_B je Meter Wirbellänge gilt:

$$dB = P_B \cdot 2(r-y) \frac{\pi Z}{W_1} dy. \quad (12)$$

Diese Kraft ist naturgemäß mit P_B gleichgerichtet und in Abb. 4b eingetragen. Die Komponenten von P_B stellt (9) und (10) dar.

B. Massenkraft infolge axialer Strömung.

Durch den Zylindermantel des Volumenelementes wird mit den Wirbeln Flüssigkeit transportiert. Dieselbe Flüssigkeitsmenge muß aus Kontinuitätsgründen durch die gleiche Zylinderfläche zurückströmen. Die axiale Geschwindigkeit dieser Flüssigkeit muß, da sie keinen Wirbelcharakter besitzt, dem Geschwindigkeitsprofil u folgen. Erstere wird daher beim Rückschreiten um $-dy$ um den Betrag du abnehmen.

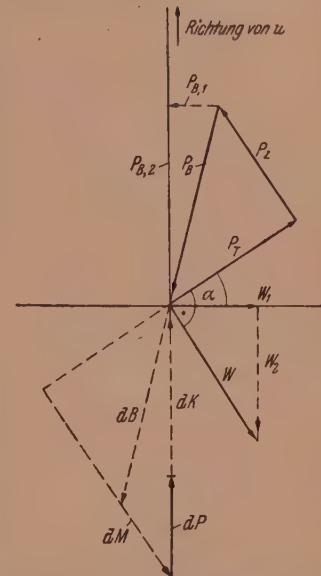


Abb. 4. a) (Oberhalb der Abszinenachse) Kräfte auf einen Wirbel. b) (Unterhalb der Abszinenachse) Kräfte auf die umgebende Flüssigkeit.

In axialer Richtung wird dadurch, ähnlich den Ausführungen auf S. 248, eine Trägheitskraft auftreten, welche die gleiche Richtung wie u hat. Durch Anwendung der Gl. (9) kann die Trägheitskraft berechnet werden. Nur ist jetzt als Masse dm jene des Volumenelementes abzüglich jener der dort vorhandenen Wirbel einzusetzen. Das Verhältnis letzterer zu ersterer sei x . Es ist dann

$$dm = 2(r-y)\pi dy \frac{\gamma}{g} (1-x).$$

Als Radialgeschwindigkeit W_r der Flüssigkeit ergibt sich unter Beachtung des weiter oben über die Kontinuitätsbedingung Gesagten, wenn das Volumen eines Wirbelringes $(r-y)\pi^2 s^2 \cdot 2$ und das je Zeiteinheit ein- bzw. ausströmende Volumen $Z(r-y)\pi^2 s^2 \cdot 2$ sei:

$$w_r = \frac{Z \cdot (r-y) \pi^2 s^2 \cdot 2}{2(r-y)\pi(1-x)} = \frac{Z\pi s^2}{1-x}.$$

Im Nenner kommt zum Ausdruck, daß infolge des Wirbelvolumens nur die im Verhältnis $(1-x)$ verringerte Zylinderfläche für die Rückströmung zur Verfügung steht. Setzt man die berechneten Ausdrücke für die analogen Größen in (9) ein, unter Beachtung, daß $W_2' = 0$ ist, ergibt sich die axiale Trägheitskraft zu

$$dK = dm \cdot W_r \cdot u' = 2(r-y)\pi dy \frac{\gamma}{g} (1-x) \cdot \frac{Z\pi s^2}{1-x} \cdot u' = 2(r-y) \frac{\pi^2 \gamma}{g} Z s^2 u' dy. \quad (13)$$

Auch in radialer Richtung tritt eine Trägheitskraft auf, denn die radiale Rückströmgeschwindigkeit ist nicht konstant. Letztere ist jedoch so klein, daß die durch sie hervorgerufenen Trägheitskräfte vernachlässigt werden können. In Abb. 4 b ist die Kraft dK ersichtlich.

Wird dK mit der axialen Komponente von dB verglichen, so ist letztere, wie aus Gl. (13) bzw. (9) und (12) entnommen werden kann, größer, da W_2' positiv ist.

C. Massenkraft infolge Wirbelauflösung.

Aus später erörterten Gründen ergibt sich, daß sowohl die Zahl der Wirbel Z als auch die Größe bzw. das Gewicht des Einzelwirbels mit dem Wandabstand y

veränderlich ist. Was die Wirbelzahl anlangt, so wird diese kleiner, d. h. die Wirbel verlieren fortschreitend ihre Rotation und gehen in gewöhnliche Flüssigkeit über. Da sie aber im Wirbelzustand gegen die Flüssigkeit die Relativgeschwindigkeit W hatten und diese im Augenblick des Aufhörens ihres Wirbelcharakters verlieren, entsteht hierdurch eine Massenkraft. Deren Größe berechnet sich folgendermaßen: Je Zeiteinheit tritt in das Volumelement, Abb. 5, eine Wirbelmasse $\frac{Qz}{g}$ ein, wenn Q das Gewicht eines Ringwirbels ist. Die Änderung dieses Ausdruckes beim Weiterschreiten um dy , also

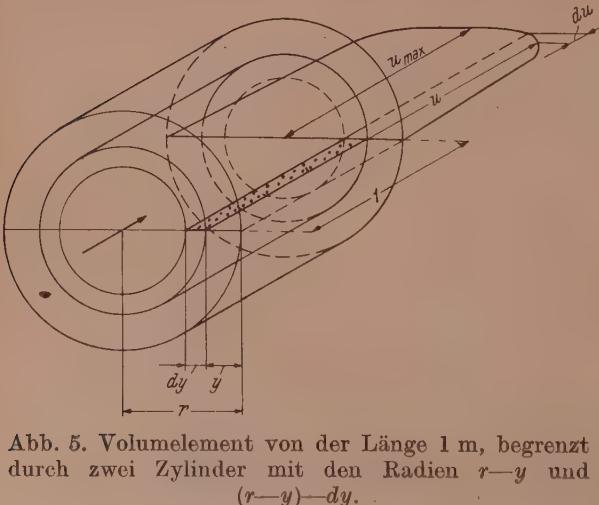


Abb. 5. Volumelement von der Länge 1 m, begrenzt durch zwei Zylinder mit den Radien $r-y$ und $(r-y)-dy$.

$\left(\frac{Qz}{g}\right)' dy$ stellt die Masse dar, welche im Volumenelement je Zeiteinheit ihren Wirbel-

charakter und die Geschwindigkeit W verliert. Die sich daraus ergebende Massenkraft kann nach dem Impulssatz berechnet werden und ergibt sich zu

$$dM = \frac{(Qz)'}{g} W dy. \quad (14)$$

Diese Kraft ist parallel zu W und gleichfalls in Abb. 4b eingezeichnet. Ihre axiale Komponente wirkt entgegengesetzt zur Hauptströmungsrichtung.

D. Druckdifferenz.

Auf die Stirnseite des Volumenelementes wirkt schließlich eine Kraft, die vom Druckabfall der Strömung in axialer Richtung herrührt. Ist die Druckdifferenz pro Meter Länge Δp , so ist diese Kraft

$$dD = \Delta p 2(r - y) \pi dy. \quad (15)$$

Die aufgezählten Kräfte müssen, damit Gleichgewicht herrscht, wieder aneinander gereiht einen geschlossenen Linienzug ergeben. Es gilt demnach in vektorieller Schreibweise

$$d\mathfrak{B} + d\mathfrak{R} + d\mathfrak{M} + d\vartheta = 0. \quad (16a)$$

In Abb. 4b ist dies dargestellt.

Würde Gl. (11) nicht auf einen Wirbel, sondern auch auf das Volumenelement bezogen werden, müßte natürlich die dort mit \mathfrak{P}_B bezeichnete Kraft ebenfalls in $d\mathfrak{B}$ übergehen und in Abb. 4a und 4b beide Werte gleich groß erscheinen.

4. Gleichgewichtsbedingung.

Die Gleichgewichtsbedingung für die auf einen Wirbel wirkenden Kräfte wurde bereits durch Gl. (11) angegeben. Desgleichen gilt Gl. (16) als Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte auf das betrachtete Flüssigkeitselement.

A. Gleichgewichtsbedingung für den Wirbel.

Es mögen nun die Komponenten der Gl. (11) für die radiale und axiale Richtung angeschrieben werden. Die ersten Komponenten mögen durch einen Index 1, letztere durch 2 gekennzeichnet sein. Werden die Beziehungen für \mathfrak{P}_T , \mathfrak{P}_Z und \mathfrak{P}_B gemäß den Gl. (4), (6), (10), (9) eingesetzt, ergibt sich für die radiale Richtung

$$-\frac{2c\gamma s^2 u' W_2 \cos^2 \alpha}{g} - C_2 \eta W_1 - \frac{s^2 \pi \gamma}{g} W_1 W_1' = 0. \quad (16)$$

Auf die gleiche Weise erhält man für die axiale Richtung

$$+\frac{2c\gamma s^2 u' W_2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} - C_2 \eta W_2 - \frac{s^2 \pi \gamma W_1}{g} (u' + W_2') = 0. \quad (17)$$

Wird noch beachtet, daß $W \cos \alpha = W_2$, $W \sin \alpha = W_1$ und $W^2 = W_1^2 + W_2^2$ ist, wobei die Bedeutung des Winkels α sich aus der Abb. 4a ergibt, erhält man für die Gl. (16) und (17)

$$-\frac{2c\gamma s^2 W_2 u' W_2^2}{g(W_1^2 + W_2^2)} - C_2 \eta W_1 - \frac{s^2 \pi \gamma W_1 W_1'}{g} = 0. \quad (18)$$

$$+\frac{2c\gamma s^2 u' W_2^2 W_1}{g(W_1^2 + W_2^2)} - C_2 \eta W_2 - \frac{s^2 \pi \gamma W_1}{g} (u' + W_2') = 0. \quad (19)$$

In diesen ist C_2 ein unbekannter Wert. Er wird daher aus (18) und (19) eliminiert, worauf man nach einigen Umformungen nachstehende Beziehung erhält:

$$\frac{W_2'}{u'} \left(1 - \frac{W_1' W_2}{W_1 W_2'}\right) = \frac{2c}{\pi} \left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 - 1. \quad (20)$$

B. Gleichgewichtsbedingungen für ein Flüssigkeitselement.

Wird Gl. (16) für die Komponenten in radialer und axialer Richtung angeschrieben, erhält man mit (12), (13), (14), (15):

$$+ \underbrace{\frac{s^2 \pi \gamma W_1}{g} W_1' 2(r-y) \frac{\pi z dy}{W_1} + \frac{(QZ)' W_1 dy}{g}}_{P_{B_1}} = 0. \quad (21)$$

$$+ \underbrace{\frac{s^2 \pi \gamma W_1}{g} (u' + W_2') 2(r-y) \frac{\pi z}{W_1} dy - 2(r-y) \pi^2 \frac{\gamma}{g} Z s^2 u' dy +}_{P_{B_2}} \\ + \frac{(Qz)'}{g} W_2 dy - \Delta p 2(r-y) \pi dy = 0. \quad (22)$$

Führt man, wie weiter oben, $W \cos \alpha = W_2$, $W \sin \alpha = W_1$ und $W^2 = W_1^2 + W_2^2$ ein, ergibt sich mit einigen kleinen Umformungen:

$$\frac{s^2 \pi \gamma}{g} W_1' 2(r-y) \pi \cdot Z + \frac{(QZ)'}{g} W_1 = 0. \quad (23)$$

$$\frac{s^2 n \gamma}{g} W_2' 2(r-y) \pi Z + \frac{(QZ)'}{g} W_2 - \Delta p 2(r-y) \pi = 0. \quad (24)$$

Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen $(QZ)'$, erhält man

$$\frac{s^2 \pi \gamma Z W_2'}{g} \left(1 - \frac{W_1' W_2}{W_1 W_2'}\right) - \Delta p = 0. \quad (25)$$

Wird hingegen aus (23), (24) der gleichfalls unbekannte Wert $s^2 \cdot z$ herausgeschafft, findet man

$$(QZ)' = \frac{\Delta p (r-y) 2 \pi}{\left(1 - \frac{W_1' W_2}{W_1 W_2'}\right) \frac{W_2}{g}}. \quad (26)$$

5. Energiebedingung:

Um der gestellten Aufgabe näherzukommen, konnten bisher vier Gleichungen, und zwar (18), (19), (23), (24) aufgestellt werden. Anderseits sind folgende Größen als unbekannt anzusehen: W_1 , W_2 , u , s , Z , c , C_2 . Die Abhängigkeit dieser Größen insbesondere der Geschwindigkeit u von der Wandentfernung y , ist gesucht.

Eine weitere Bedingungsgleichung findet sich, wenn der Energieumsatz der Strömung betrachtet wird. Um einige grundsätzliche Verhältnisse näher zu erkennen, möge zunächst der Gesamtumsatz in einem Rohr von 1 m Länge untersucht werden.

A. Gesamter Energieumsatz.

Es möge das Gleichgewicht der Kräfte auf einem Wasserzyylinder vom Rohrhalbmesser r und der Länge 1 betrachtet werden. Auf denselben wirkt als Differenzkraft der Stirnflächen $r^2 \pi \Delta p$, auf den Mantel pro Quadratmeter Oberfläche die Schubspannung τ_w oder insgesamt $\tau_w 2 r \pi$. Durch Gleichsetzung ergibt sich:

$$r^2 \pi \Delta p = \tau_w 2 r \pi. \quad (27)$$

Nunmehr wird die pro Zeiteinheit im gleichen Volumen umgesetzte Energie betrachtet. Die Arbeit der Druckkräfte pro Sekunde ist, wenn u_m die mittlere Strömungsgeschwindigkeit über den Querschnitt bedeutet, $\Delta p u_m r^2 \pi$. Diese Energie wird aufgezehrt bzw. setzt sich in Wärme um, und zwar auf zweierlei Arten. In nächster Nähe der Rohrwand ist keine Turbulenz vorhanden, die Schubspannungen werden infolge der Zähigkeit der Flüssigkeit übertragen. Dort findet eine Wärmeentwicklung infolge der Arbeit der Zähigkeitskräfte statt. Ab einer kleinen Entfernung y_0 von der Wand werden jedoch die Zähigkeitskräfte keine Rolle mehr spielen, dagegen die

Turbulenz voll eingesetzt haben. Hier findet dauernde Wärmeentwicklung durch teilweise Vernichtung der Energie der turbulenten Bewegung statt. Bedeutet also R_1 die Wärmeentwicklung in der Randzone R_2 im übrigen Rohr, wird sein

$$\Delta p u_m \cdot r^2 \pi = R_1 + R_2. \quad (28)$$

Die Wärmeentwicklung in der Randzone ist einfach berechenbar, wenn man für diese Überlegung die Annahme der laminaren Grenzschicht beibehält. In dieser kann die Schubspannung τ_w als konstant angesehen werden. An der Grenzfläche zwischen laminarer und turbulenten Strömung herrsche die Geschwindigkeit u_0 , Abb. 6. Dann gilt für die Wärmeentwicklung in der Grenzschicht pro Zeiteinheit

$$R_1 = \tau_w \cdot 2 r \pi \cdot u_0. \quad (29)$$

Mit Benutzung von Gl. (27) erhält man dann:

$$R_1 = \Delta p r^2 \pi \cdot u_0. \quad (30)$$

Schließlich ergibt sich nach Einsetzen in Gl. (28) auch die Wärmeentwicklung je Zeiteinheit außerhalb der Grenzschicht zu

$$R_2 = \Delta p r^2 \pi (u_m - u_0). \quad (31)$$

Diese beiden Bezeichnungen sollen nur abzuschätzen gestatten, wie die gesamte Wärmeentwicklung verteilt ist. Da u_0 größtenteils $\frac{2}{3} u_m$ ist, sieht man, daß ungefähr zwei Drittel der ganzen Wärmeentwicklung in der laminaren Schicht und ein Drittel in der Kernströmung erfolgt.

Wie auseinandergesetzt wurde, stammt die Wärmeentwicklung aus der Druckenergie. Daraus darf aber keineswegs geschlossen werden, daß die in der laminaren Schicht frei werdende Wärme aus dem Anteil der Druckenergie stammt, welche auf die zugehörige Stirnfläche entfällt. Diese wäre durch die Räume r und $r - y_0$ begrenzt und gegenüber $r^2 \pi$ vernachlässigbar klein. Es wird vielmehr die Druckenergie fast zur Gänze im turbulenten Teil aufgenommen und dort zu zirka ein Drittel in Wärme und zu zwei Dritteln in kinetische Energie der Turbulenz umgesetzt. Diese wandert aus dem Rohrinneren zum Rand, wo ihre Umsetzung in Wärme erfolgt.

B. Energieumsatz im Volumenelement.

Die bisherigen Überlegungen gehen auf den inneren Mechanismus der Energieumsetzung noch nicht näher ein. Um dies zu tun, ist es notwendig, wieder ein Volumelement von der Länge 1 m und der Dicke dy zu betrachten, Abb. 7. Wenn man das Kantengerippe derselben im Raum festgehalten annimmt, findet durch die beiden Mantelflächen sowie durch die Stirnflächen ein Energietransport statt. Die Arbeit der Druckkräfte ist, wenn u die Geschwindigkeit der Hauptströmung an der Stelle y ist,

$$dE_P = \Delta p (r - y) 2 \pi \cdot u \cdot dy. \quad (32)$$

Diese Energie setzt sich nach den früheren Ausführungen zum Teil in Wärme, zum Teil in Erhöhung der kinetischen Energie um. Es ist also

$$\Delta p (r - y) 2 \pi u dy = dE_w + dE_k. \quad (33)$$

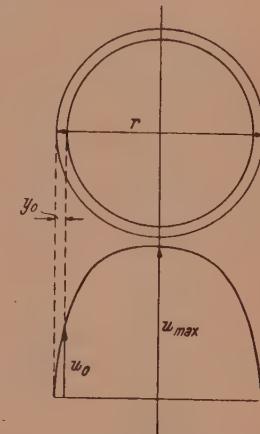


Abb. 6. Geschwindigkeitsverteilung und Grenzschicht.

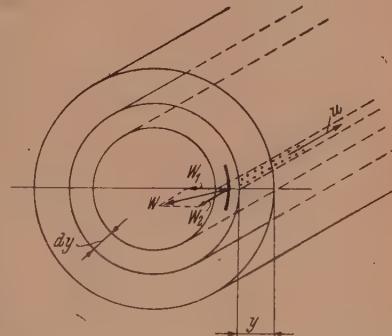


Abb. 7. Volumenelement mit Teil eines Tangentialwirbels und dessen Relativgeschwindigkeiten W_1 und W_2 .

Zunächst möge die Wärmeentwicklung berechnet werden. Geht man wieder unter Vorbehalt einer späteren Richtigstellung von der Hilfsvorstellung der konzentrischen Wirbelringe aus, haben diese gegenüber der Hauptströmung eine radiale Geschwindigkeit W_1 und eine axiale Geschwindigkeit W_2 . Zwischen Wirbel und Hauptströmung tritt je Meter Wirbellänge eine Zähigkeitskraft P_z gemäß Gl. (6) auf. Im Volumenelement sind jedoch nach Gl. (11a) $\frac{z}{W_1} dy$ Wirbelringe vorhanden. Diese leisten die Arbeit pro Zeiteinheit

$$P_z \cdot \frac{z}{W_1} dy (r - y) 2\pi \cdot W = C_2 \eta W^2 \frac{z}{W_1} (r - y) 2\pi dy.$$

Ferner wurde vorausgesetzt, daß das gesamte sekundliche Wirbelgewicht $(Z \cdot Q)$, genannt „Wirbelstrom“, auf Null in Rohrmitte abnimmt. Es wird also an jeder durch die Wandentfernung y charakterisierten Stelle eine gewisse Wirbelmenge ihren Wirbelcharakter verlieren. Auf die Strecke dy entfällt daher ein Wirbelgewichtverlust $(Z Q)' dy$ oder, da die zugehörige Masse gegen die Flüssigkeit die relative Geschwindigkeit W hatte, ein Energieverlust $\frac{(Z Q)' W^2 dy}{2g}$, der in Wärme umgewandelt wird. Das negative Vorzeichen ergibt sich, da $(Z \cdot Q)$ mit zunehmendem y abnimmt.

Man erhält demnach für die Umsetzung in Wärme

$$dE_W = C_2 \eta W^2 \frac{z}{W_1} 2(r - y) \pi dy - \frac{(Z Q)' W^2 dy}{2g}. \quad (34)$$

Nun werden die Änderungen der kinetischen Energie der in das Kantengerippe ein- und ausströmenden Flüssigkeitsmengen betrachtet. Der Wirbelstrom trägt je Kilogramm den Energieinhalt $\frac{(u + W_2)^2}{2g} + \frac{W_1^2}{2g}$, besitzt also den Energieinhalt $Z Q \cdot \left[\frac{(u + W_2)^2}{2g} + \frac{W_1^2}{2g} \right]$. Die Änderung dieses Ausdruckes auf der Strecke dy ergibt die durch den Wirbelstrom verursachte Energieänderung im Kantengerippe zu

$$\left\{ Z Q \cdot \left[\frac{(u + W_2)^2}{2g} + \frac{W_1^2}{2g} \right] \right\}' dy.$$

Aus Kontinuitätsgründen muß die gleiche Flüssigkeitsmenge, welche in den äußeren Mantel des Kantengerippes eintritt, diesen wieder verlassen. Da es sich jetzt um wirbellose Flüssigkeit handelt, ist, wie schon weiter oben ausgeführt wurde, deren axiale Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit der Hauptströmung u identisch, deren radiale Geschwindigkeit jedoch so klein, daß sie vernachlässigt werden kann. Die heraustransportierte Energie ist dann $Z Q \frac{u^2}{2g}$. Die Änderung dieses Wertes auf der Strecke dy liefert die durch die radiale Strömung bedingte Energieänderung im Kantengerippe und beträgt: $\left(Z Q \frac{u^2}{2g} \right)' dy$.

Die gesamte Änderung der kinetischen Energie dE_K im Kantengerippe ist demnach, da es sich um zwei Energieströme entgegengesetzter Richtung handelt,

$$\left\{ Z Q \left[\frac{(u + W_2)^2}{2g} + \frac{W_1^2}{2g} \right] \right\}' dy - \left\{ Z Q \frac{u^2}{2g} \right\}' dy = dE_K. \quad (35)$$

Quadriert man $(u + W_2)$ und führt die Differentiation durch, beachtet man ferner, daß $W^2 = W_1^2 + W_2^2$ und $W^{2'} = W_1^{2'} + W_2^{2'}$ ist, und streicht die sich aufhebenden Glieder, ergibt sich

$$(Z Q)' \frac{u W_2}{g} + (Z Q)' \frac{W^2}{2g} + Z Q \frac{W^{2'}}{2g} + Z Q \frac{(u W_2)'}{g} = \frac{dE_K}{dy}. \quad (36)$$

Nun kann (34) und (36) in (33) eingesetzt werden und es folgt nach Wegstreichen

gleicher Glieder, Ausdrücken des Wirbelgewichtes durch $Q = 2 s^2 \pi^2 (r - y) \gamma$ und einiger kleiner Umformungen

$$\Delta p (r - y) 2 \pi u = C_2 \eta W^2 \frac{s}{W_1} 2 (r - y) \pi + (Z Q)' \frac{u W_2}{g} + \\ + \frac{Z 2 s^2 \pi^2 (r - y) \gamma}{g} [u W_2' + W_2 u' + W W']. \quad (37)$$

Berechnet man aus obiger Gleichung den Wert Z , ergibt sich

$$Z = \frac{\Delta p (r - y) 2 \pi}{C_2 \eta W^2 2 (r - y) \pi + \frac{(Z Q)' W_2}{g Z} + \frac{Q}{u \cdot g} [u W_2' + W_2 u' + W W']} \quad (38)$$

Der erste Ausdruck des Nenners in (38) kann umgeformt werden. Wenn man wieder auf Gl. (18) und (19) zurückgreift, und in diesen C eliminiert, erhält man

$$C_2 \eta \frac{W_1}{W_2} + \frac{s^2 \pi \gamma W_1 W_1'}{g W_2} = -C_2 \eta \frac{W_2}{W_1} - \frac{s^2 \pi \gamma (u' + W_2')}{g}. \quad (39)$$

Nach einigen einfachen Umformungen ergibt sich hierfür

$$\frac{C_2 \eta}{W_1 W_2} (W_1^2 + W_2^2) = -\frac{s^2 \pi \gamma}{g} \left(\frac{W_1 W_1'}{W_2} + W_2' + u' \right). \quad (40)$$

Multipliziert man schließlich beide Seiten der Gleichung mit $\frac{2 \pi (r - y) W_2}{u}$, ergibt sich

$$\frac{2 \pi (r - y) C_2 \eta W^2}{u W_1} = -\frac{Q}{g u} (W_1 W_2' + W_2 W_2' + u' W_2). \quad (41)$$

Hierbei wird für den entsprechenden Ausdruck in der eckigen Klammer das Wirbelgewicht Q eingeführt. Führt man (41) für das erste Glied des Nenners von (38) ein, kürzt sich dieses gegen das zweite und dritte Glied der eckigen Klammer in (38). Man erhält schließlich

$$Z = \frac{\Delta p (r - y) 2 \pi}{Q u' \frac{W_2'}{u'} - \frac{(Z Q)'}{Z} W_2}. \quad (42)$$

Diese Gleichung gestattet demnach, die Wirbelzahl zu berechnen. Z ist eine in Randnähe steil, dann flacher abfallende Funktion. Wird sie in Achsennähe durch ihre Tangente ersetzt, ergibt sich

$$Z = n (r - y). \quad (43)$$

Der Wert n ist hierbei eine Proportionalitätskonstante.

6. Wirbelzahl:

A. Gestalt der Wirbelfäden.

Bisher wurde von der Annahme ausgegangen, daß die Wirbel konzentrische, koaxiale Ringe sind, die vom Rand zur Mitte wandern. Es wurde betont, daß dies eine Hilfsvorstellung sei, die der Wirklichkeit entsprechend anzupassen ist.

Wie bereits eingangs erwähnt, ist, mikroskopisch betrachtet, auch eine glatte Wand als stark und regellos gezackte Fläche anzusehen. An so einer Fläche können in der gleichen Ebene liegend Wirbelfäden axialer, tangentialer oder beliebiger Richtung entstehen. Letztere mögen derart durch solche in den zwei erstgenannten Hauptrichtungen verlaufende ersetzt werden, daß der Effekt unverändert bleibt. Man wird demnach die Gesamtheit der Wirbel als aus axialen und tangentialen Komponenten bestehend ansehen können. Letzteren wird das Entstehen der nach innen gerichteten Kraftwirkung zuzuschreiben sein, beiden Komponenten die auftretenden Massen- und Zähigkeitskräfte. Natürlich kann es sich hierbei nur um eine Näherung handeln. Bildlich gesprochen, wird demnach ein Wirbelnetz von der Begrenzungsfläche in die Flüssigkeit einwandern.

Im Augenblick des Loslösens des Wirbelnetzes von der Oberfläche wird es infolge der stark veränderlichen Geschwindigkeitsverteilung der Hauptströmung seiner Gestalt nach nicht stabil bleiben können. Unabhängig von der weiteren Form der Wirbelfäden kann die Vorstellung des Netzes weiter beibehalten werden, wenn durch entsprechende Wahl des Verhältnisses der beiden Komponenten die Anpassung an die Wirklichkeit erfolgt. Dieses Verhältnis wird daher im allgemeinen eine Funktion der Wandentfernung sein.

B. Einfluß auf die Kräfte am Wirbel.

Aus der Art der Entstehung der Wirbelfäden an der Wandfläche kann man annehmen, daß zu Beginn die axiale Komponente stark überwiegen wird. Daher wird, wie weiter unten dargelegt, vor allem diese in Randnähe einen Verlust an Wirbelmasse erleiden, während dann in der Folge die Abnahme axialer und tangentialer Wirbelmasse ungefähr gleichmäßig erfolgt.

Auf die Kraftwirkung gemäß Gl. (4) hat nur die tangentielle Komponente Einfluß. Es muß daher, da die genannte Gleichung die Kraftwirkung von einem Meter eines beliebig verlaufenden Wirbelfadens darstellt, der Wert C aus dem Verhältnis der Länge von tangentialer T zur Summe von axialer und tangentialer Wirbelkomponente $A + T$ gebildet werden. Es ergibt sich also

$$C = \frac{T}{A + T} \cdot C_0. \quad (44)$$

C_0 ist nunmehr eine Konstante.

Wäre nur eine tangentielle Komponente vorhanden, müßten die Wirbelfäden konzentrische, koaxiale Ringe sein, wie eingangs angenommen wurde.

Auch die Wirbelzahl Z hat dem Vorhandensein von zwei Wirbelkomponenten Rechnung zu tragen. Ist Z_0 die Zahl der tangentialen Komponenten, d. h. der Wirbelringe, so ist auch der Wirbelstrom derselben proportional z_0 . Der gesamte Wirbelstrom ist dann proportional $z_0 \cdot \frac{A + T}{T}$, so daß in allen bisher benützten Gleichungen letzterer Ausdruck für Z gesetzt werden kann. Es ist also

$$Z = Z_0 \cdot \frac{A + T}{T}. \quad (45)$$

Unter Zugrundelegung dieser erweiterten Bedeutung für z gelten alle bisherigen Gleichungen unverändert weiter.

Setzt man Gl. (45) in (44) ein, ergibt sich

$$C = \frac{Z_0}{Z} \cdot C_0. \quad (46)$$

Nunmehr möge der Ausdruck für C in Gl. (20) eingeführt und Z berechnet werden.

Man erhält demnach

$$Z = \frac{\frac{2}{\pi} \left(\frac{W_2}{W_1} \right)^2 Z_0 C_0}{\frac{W_2'}{u'} \left(1 - \frac{W_1' W_2}{W_1 W_2'} \right) + 1}. \quad (47)$$

Es sind Gründe vorhanden, die Ausdrücke der Zähler in (47) und (42) gleichzusetzen. Macht man diesen Ansatz und berücksichtigt, daß der Nenner in (47) eine mit y , insbesondere in Randnähe stark zunehmende positive Funktion ist, was berechtigt 1 zu vernachlässigen, folgt:

$$Z = \frac{m(r-y)}{\frac{W_2'}{u'} \left(1 - \frac{W_1' W_2}{W_1 W_2'} \right)}. \quad (48)$$

Dies ist eine zweite Gleichung für Z , die gleichfalls benötigt wird.

C. Wirbelzahl und Wirbelgewicht.

Sofort nach Beginn der Bewegung der Wirbel setzt auch deren Zerstörung ein. Daran kann entweder schuldtragend sein, daß die Rotationsenergie des Wirbelfadens durch die Zähigkeit des umgebenden Mediums aufgezehrt wird oder erstere wird durch das Zusammentreffen zweier Wirbelfäden vernichtet.

1. Randzone. In der Randzone werden beide Ursachen zutreffen und wird hier vor allem eine starke Abnahme der axialen Wirbelkomponente stattfinden, da diese im Gegensatz zur tangentialem Komponente, in ihrem Bestand nicht durch die Zunahme von u unterstützt wird. Im Rohrinneren, wo die tangentiale Komponente überwiegt, wird dementsprechend die Zerstörung hauptsächlich auf das Zusammentreffen von Wirbelfäden zurückzuführen sein.

Die Zerstörung der Wirbel äußert sich in einer Abnahme des Wirbelstromes ($Z \cdot Q$) mit zunehmender Randentfernung y . Trotzdem erfolgt eine Zunahme des Gewichtes des Einzelwirbels Q , wie folgende Überlegungen klarstellen, welche zunächst die Randzone betreffen mögen.

Es werde die Zähigkeitskraft P_z , Gl. (6), betrachtet, welche auf den Wirbelfaden und gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet auf die umgebende Flüssigkeit wirkt. Dadurch wird auf letztere ein Impuls übertragen, welcher die Bildung einer „Flüssigkeitsschleife“ hinter dem Wirbel veranlaßt. Von dieser wird ein Teil ε von der Rotation des Wirbels erfaßt und vergrößert, so laufend dessen Gewicht. Die Gewichtszunahme G der Flüssigkeitsschleife je Zeiteinheit und 1 m Wirbellänge ergibt sich aus dem Impulssatz:

$$P_z = \varepsilon G \cdot W/g. \quad (48a)$$

ε ist eine Proportionalitätskonstante. Mit Gl. (6) folgt die Gewichtszunahme G_w des Wirbels

$$G_w = \varepsilon G = g \varepsilon C_2 \eta. \quad (49)$$

Der Wert C_2 ist keine Konstante. Um seine Größe in Randnähe abzuschätzen, wird Gl. (40) herangezogen. Diese lautet unter Vernachlässigung von W_1' und W_2' gegen u' und Multiplikation beider Seiten mit $(r - y)$

$$(r - y) \frac{C_2 \eta W^2}{W_1 W_2} = - \frac{s^2 \pi \nu u' (r - y)}{g}. \quad (50)$$

Der rechte Ausdruck ist nach der weiter unten entwickelten Gl. (60) eine Konstante. In Randnähe sind W_2 und W nur wenig veränderlich, werden dort als konstant angesehen, so daß bei Berücksichtigung, daß W_2 ein negativer Wert ist,

$$C_2 = \frac{K_1 W_1}{r - y}. \quad (51)$$

gesetzt werden kann, wobei K_1 eine Konstante ist. Die Gewichtszunahme eines Wirbelringes je Zeiteinheit, auf den ganzen Umfang bezogen, ist mit Gl. (49)

$$\frac{dQ}{dt} = G_w \cdot (r - y) 2 \pi = g \varepsilon C_2 \eta (r - y) 2 \pi. \quad (52)$$

Wird hier Gl. (51) eingesetzt und beachtet, daß $\frac{dQ}{dt} = W_1 Q'$ ist, ergibt sich

$$Q' = g \varepsilon \eta K_1 2 \pi = D. \quad (53)$$

Es ist also die Gewichtszunahme des Wirbels bei Fortschreiten in radialer Richtung um die Längeneinheit eine Konstante, die D genannt werden möge. Die Integration liefert bereits die Abhängigkeit des Wirbelgewichtes von y :

$$Q = D \cdot y + E. \quad (54)$$

Die Integrationskonstante E ergibt sich aus der Anfangsbedingung, nach welcher für $y = 0$, Q praktisch auch gleich 0 ist, gleichfalls zu 0. Q ist bekanntlich das Gewicht

des aus tangentialen Komponenten gebildeten Ringes und kann aus Ringdurchmesser und Wirbelfadendurchmesser gemäß $Q = 2(r - y)\pi^2 s^2 \gamma$ leicht berechnet werden. Man erhält dann für Gl. (54) mit einer neuen Proportionalitätskonstanten F

$$s^2(r - y) \cdot F = y. \quad (55)$$

2. Innenzone. Wenn nun die Verhältnisse in größerer Randentfernung betrachtet werden, wird dort, wie schon erwähnt, in steigendem Maße an der Zerstörung der Wirbel das Zusammentreffen zweier Fäden entgegengesetzter Drehrichtung schuldtragend sein. In diesem Falle verschwinden je Zusammenstoß zwei Wirbel. Treffen hingegen gleichsinnig rotierende Wirbelfäden zusammen, verschmelzen diese zu einem Wirbel mit doppelter Masse. Dies muß man hier in weit höherem Umfang als in Randnähe annehmen, denn es treffen sich hauptsächlich tangentiale Wirbelkomponenten entlang Erzeugender, im Gegensatz zur Randzone, wo beide Komponenten vorhanden sind und daher die Berührung mehr in Punkten erfolgt. Letzterer Vorgang führt wohl auch zu einer Zerstörung der Wirbel, aber nicht zu einer gleichzeitigen Vergrößerung derselben aus der eigenen Masse heraus.

Beim Zusammentreffen von 2 gleichsinnig rotierender Fäden in der Innenzone hat nach obigem die Wirbelzahl um 1 abgenommen, das Wirbelgewicht um 1 zugenommen. Da das Treffen gleich oder verkehrt rotierender Wirbel dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, wird demnach bei zwei Zusammentreffen eine Abnahme der Wirbelzahl um 3 und eine Zunahme des Wirbelgewichtes um 1 stattgefunden haben.

Es muß jedoch festgehalten werden, daß auch beim Zusammentreffen gegenseitlich rotierender Wirbel nicht unbedingt eine Auflösung beider Wirbel stattfinden muß, denn die Wirbelintensitäten beider werden nicht gleich sein. Es wird daher auch in diesem Falle ein Teil der Treffen zu einer Verschmelzung von zwei Wirbeln zu einem neuen, doppelt so schweren, allerdings mit verminderter Rotation führen. In diesem Falle würde demnach bei zwei Zusammentreffen die Wirbelzahl um 2 abgenommen, das Gewicht der beiden verbliebenen Wirbel um 2 zugenommen haben. Unbeschadet der wirklichen Verhältnisse folgt aus vorstehendem, daß die Gewichtsverminderung des Wirbelstromes durch Abnahme der Wirbelzahl und die Gewichtserhöhung des Einzelwirbels einander zugeordnet bzw. proportional sind. Es ist also

$$Z' Q = -\alpha Q' Z. \quad (56)$$

Der Proportionalitätsfaktor α wäre im ersten Grenzfall 3, im zweiten 1. Es kann vermutet werden, daß er in Wirklichkeit zwischen diesen Werten liegen wird.

Anderseits ist:

$$(Z Q)' = Z' Q + Q' Z.$$

Wird Gl. (56) eingesetzt, erhält man schließlich nachstehende Beziehung:

$$(Z Q)' = -Q' Z (\alpha - 1). \quad (57)$$

Die Gewichtszunahme aus der Flüssigkeitsschleppen heraus ist für das Rohrinnere, wie Gl. (50) in (52) eingesetzt mit $W_2 \doteq 0$ zeigt, vernachlässigbar.

7. Die Geschwindigkeitsverteilung.

A. Berücksichtigung der Zähigkeit.

Um die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr kennenzulernen, wurden bereits die Kraftverhältnisse an einem ringförmigen Volumelement nach Abb. 5 betrachtet. In allernächster Wandnähe wird auch die Zähigkeit der Flüssigkeit eine Rolle spielen, derart, daß sie bremsende Kräfte hervorruft. Es möge noch unter Berücksichtigung dieser Kräfte betrachtet werden.

Die auf den äußeren Mantel des Volumelementes wirkende Zähigkeitskraft ist $2\pi(r-y)\eta u$. Auf den Innenmantel wirkt entgegengesetzt gerichtet die Kraft $2\pi(r-y)\eta u' + d[2\pi(r-y)\eta u']$. Die resultierende Zähigkeitskraft ist axial gerichtet, Abb. 8, und beträgt:

$$dV = -2\pi\eta[(r-y)u']' dy. \quad (58)$$

Würde man in der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte obigen Ausdruck berücksichtigen, ergibt sich statt Gl. (16) in vektorieller Schreibweise nachstehende Beziehung:

$$d\mathfrak{B} + d\mathfrak{R} + d\mathfrak{M} + d\vartheta + d\mathfrak{V} = 0. \quad (59)$$

Wie eine Größenordnungsmäßige Abschätzung zeigt, ist eine Berücksichtigung der Zähigkeitskräfte nur in unmittelbarster Randnähe erforderlich. An der Außenseite dieser Schicht können sogar die Turbulenzglieder vernachlässigt werden, so daß man für dieses Gebiet zu der bekannten laminaren Geschwindigkeitsverteilung kommt.

B. Geschwindigkeitsverteilung im Rohr.

Für die weiteren Untersuchungen, welche das turbulente Gebiet umfassen, wird der Einfluß der Zähigkeit außer acht gelassen.

Es möge demnach in der Folge auf die Gl. (25) zurückgegriffen werden. Diese lautete:

$$\frac{s^2\pi\gamma Z W_2'}{g} \left(1 - \frac{W_1' W_2}{W_1 W_2'}\right) - \Delta p = 0.$$

Hier sieht man, daß der Ausdruck $W_2' \left(1 - \frac{W_1' W_2}{W_1 W_2'}\right)$ auch in Gl. (48) vorkommt. Eliminiert man ihn mit Hilfe dieser, so fällt auch Z weg und es folgt bei Zusammenfassung der Konstanten in H :

$$s^2 u' (r-y) = H. \quad (60)$$

Nunmehr wird in (60) Gl. (55) eingeführt und es folgt mit $HF = L$

$$y u' - L = 0. \quad (61)$$

Die Integration führt schließlich mit H als Integrationskonstante zur gesuchten Geschwindigkeitsverteilung im Rohr:

$$u = L \ln y + H. \quad (62)$$

Bezeichnet man weiters mit u_0 die Geschwindigkeit an der Stelle, ab wo der Einfluß der Zähigkeit keine Rolle mehr spielt, d. h. am Innenrand der Grenzschicht, mit y_0 die dazugehörige Wandentfernung und führt dieses Wertpaar als Randbedingung ein, erhält man

$$u = L \ln \frac{y}{y_0} + u_0. \quad (63)$$

Dies ist die bereits von v. Kármán¹⁶ und Prandtl² auf Grund von Dimensionsbetrachtungen bzw. Annahmen über den Mischweg abgeleitete Geschwindigkeitsverteilung.

Das logarithmische Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gilt mit Ausnahme des Bereiches in Achsennähe über den ganzen Querschnitt. Das Gesetz ist durch die Messungen von Nikuradse⁷ u. a. experimentell weitgehend sichergestellt.

In Rohrmitte würde die logarithmische Geschwindigkeitsverteilung zu einem Knick im Geschwindigkeitsprofil führen. In Wirklichkeit ist aber dort die Tangente an

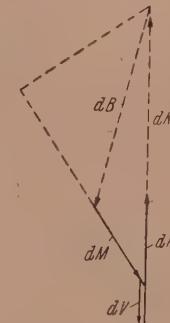


Abb. 8. Kräfte auf die umgebende Flüssigkeit bei Berücksichtigung der Zähigkeit.

¹⁶ Th. v. Kármán: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl. 58 (1930).

das Geschwindigkeitsprofil eine horizontale Linie. Tatsächlich führt die dargelegte Theorie für das achsennahe Gebiet zu einer solchen Geschwindigkeitsverteilung, und zwar zu einer schon vor längerer Zeit von Darcy² empirisch gefundenen Form.

C. Geschwindigkeitsverteilung in Achsennähe.

Wenn man in Gl. (56) den Faktor α , der, wie dargelegt, zwischen 1 bis 3 liegen kann, mit 2 ansetzt, lautet diese:

$$Z' Q = -2 Q' Z. \quad (64)$$

Die Beziehung für Z in Achsennähe wurde schon früher mit (43) berechnet. Ihre Ableitung lautet:

$$Z' = -n. \quad (65)$$

Wird diese Gleichung und (43) in (65) eingeführt, erhält man:

$$-n Q = -2 Q' n (r - y).$$

Nach Integration mit $\ln H$ als Integrationskonstante folgt:

$$2 \ln Q = -\ln (r - y) + \ln H = \ln \frac{H}{r - y}. \quad (66)$$

Das Wirbelgewicht ist $Q = 2(r - y) \pi^2 s^2 \gamma$, so daß man nach Wegschaffen des Logarithmus mit entsprechend geänderter Konstante erhält:

$$s^2 (r - y) = \frac{N}{\sqrt{r - y}} \quad (67)$$

Wird mit Hilfe dieser Gleichung der Ausdruck $s^2 \cdot (r - y)$ aus Gl. (60) eliminiert, folgt mit einer neuen Konstanten $J = \frac{G}{N}$ die Differentialgleichung

$$\frac{u'}{\sqrt{r - y}} = J. \quad (68)$$

Die Integration liefert mit der Integrationskonstanten C_0 den Ausdruck

$$-\frac{J \cdot 2}{3} (r - y)^{3/2} = u + C_0. \quad (69)$$

Wird als Randbedingung für $y = r$, $u = u_{\max}$ eingeführt, erhält man schließlich

$$u = u_{\max} - \frac{J \cdot 2}{3} (r - y)^{3/2}. \quad (70)$$

Dies ist, wie eingangs erwähnt, die bereits experimentell von Darcy gefundene Form der Geschwindigkeitsverteilung, welche von der Mitte bis zu etwa zwei Dritteln des Halbmessers in sehr guter Übereinstimmung mit der tatsächlich gemessenen Geschwindigkeitsverteilung steht.² Diese Kurve hat dann in Rohrmitte eine horizontale Tangente.

Es wird demnach mit Ausnahme der unmittelbar am Rand liegenden Zone die Geschwindigkeitsverteilung zunächst ausschließlich durch Gl. (63) beschrieben. In einem anschließenden Bereich wird Gl. (63) und (70) gelten, während in Achsennähe ausschließlich Gl. (70) anzuwenden ist.

(Eingegangen am 18. März 1947.)

Persönliches.

Eduard Doležal zum 85. Geburtstag.

Die außergewöhnliche Not der Zeit soll uns nicht hindern, jenes Mannes zu gedenken, der mit Recht als der Nestor des österreichischen Vermessungswesens bezeichnet werden kann und dessen Verdienste so umfassend und vielgestaltig sind, daß der Name Doležal weit über die Grenzen unserer Heimat hinaus in der internationalen Fachwelt geschätzt und gewürdigt wird. Hofrat Doležal ist einer der hervorragendsten Gelehrten in seinem Fache und begründete seinen internationalen Ruf durch die Verfassung vieler bedeutender und grundlegender Werke des Vermessungswesens. In hohem Maße hat er unter anderem zur Entwicklung und zu dem ungeahnten Aufschwung des modernsten Zweiges der Geodäsie, der Photogrammetrie, beigetragen und hat die über fast alle europäischen Staaten verbreitete Internationale Gesellschaft für Photogrammetrie begründet, die ihn zu ihrem Ehrenpräsidenten ernannt hat. Dank der Photogrammetrie ist es heute möglich, photographische Geländeaufnahmen, die mit photographischen Meßkammern gemacht werden, in topographische Karten umzuwandeln, ein Vorgang, der mit Hilfe von eigenen Apparaten automatisch erfolgen kann. Dieses Verfahren wird mit besonderem Vorteil in solchen Gebieten angewendet, die schwer zugänglich sind, wie im Hochgebirge, in unkultivierten Ländern, Urwäldern usw. Aber nicht nur zur Vermessung der Erdoberfläche, sondern auch für viele andere Wissensgebiete, wie Architektur, Medizin und Meteorologie, wird die Photogrammetrie mit oft geradezu verblüffendem Erfolg herangezogen.

Hofrat Doležal hat sich auch in hervorragendem Maße auf den verschiedensten Gebieten organisatorisch betätigt; er wurde schon im alten Österreich bei den mannigfältigsten Fragen des Unterrichtswesens sowie seines Fachgebietes von den betreffenden Ressortministern als Berater herangezogen. Ihm ist auch in erster Linie die Zentralisierung und Vereinheitlichung des staatlichen Vermessungswesens, die in der Schaffung des Bundesvermessungsamtes zum Ausdruck kam, zu danken. Diese Reform ist für viele andere Staaten vorbildlich geworden und stellt eine restlos gelungene Verwaltungsreform im neuen Österreich dar.

Dem Gelehrten, der sein Lehramt durch 44 Jahre ausübte und der eines der angesehensten Mitglieder des Professorenkollegiums der Wiener Technischen Hochschule war, sind vielfach in- und ausländische Ehrungen zuteil geworden, unter anderem wurden ihm die Würde eines Ehrensenators der Technischen Hochschule in Wien sowie die Ehrendoktorate der Hochschulen in Aachen, Brünn und Leoben verliehen und anlässlich seines 70. Geburtstages fanden sich prominente Persönlichkeiten aus aller Welt, darunter der frühere Ministerpräsident der französischen Republik Painlevé, in Wien ein, gewiß ein sichtbarer Beweis der internationalen Anerkennung und Wertschätzung Doležals.

Doležal wurde im Jahre 1862 als Sohn eines Webers und Kleinwirtschaftsbüters in Mährisch-Budwitz geboren, übersiedelte aber schon in jungen Jahren mit seinen Eltern nach Wien.

In Wien absolvierte Doležal trotz der dürftigen Verhältnisse, in welchen zu leben er gezwungen war, mit ausgezeichnetem Erfolge seine Studien an der Technik und Universität und wurde im Jahre 1887 Assistent für Praktische Geometrie an der Lehrkanzel des Professors Schell an der Technischen Hochschule in Wien. Zwei Jahre später erhielt er eine Berufung als Lehrer an die in Sarajevo neu errichtete Technische Mittelschule. Nach sechsjähriger, an Erfolgen und Anerkennung reicher Tätigkeit kehrte Doležal 1896 an die Technische Hochschule in Wien zurück, wo er als Konstrukteur auch mit der Abhaltung von Vorlesungen über Photogrammetrie betraut wurde. Drei Jahre später finden wir in bereits als o. ö. Professor für Darstellende Geometrie und Praktische Geometrie an der Bergakademie in Leoben. Auf Grund seiner glänzenden Erfolge als Lehrer und seiner hervorragenden wissenschaftlichen Arbeiten hatte er sich ein solches Ansehen in wissenschaftlichen Kreisen erworben, daß er im Jahre 1905 als Nachfolger seines hochgeschätzten Lehrers, des Professors Schell, an die Technische Hochschule in Wien berufen und schon nach drei Jahren vom Professorenkollegium zum Rector magnificus gewählt wurde.

Die rastlose und aufreibende Tätigkeit, die Doležal in den nun folgenden Jahren nicht nur als Lehrer, sondern auch als Konsulent zweier Ministerien, als Mitglied und Leiter vieler wissenschaftlicher Körperschaften und Kommissionen ausgeübt hat, nötigten ihn, aus Gesundheitsrücksichten im Jahre 1930 zum größten Bedauern aller beteiligten Kreise in den Ruhestand zu treten. Während seiner langjährigen Lehrtätigkeit hat sich Doležal die wärmsten Sympathien seiner Hörer erworben, die nicht nur mit Begeisterung seinen stets fesselnden Vorträgen folgten, sondern die in ihm, der stets für das Wohl seiner Schüler, besonders der Bedürftigen, besorgt war, auch ihren väterlichen Freund und Berater verehrten. Er, dessen eigene Studienzeit von nicht geringen materiellen Nöten umschattet war, konnte wie kein anderer dieselben auch bei seinen Schülern nachfühlen und betreute sie im wahrsten Sinne des Wortes auch nach besten Kräften.

Noch heute ist es sein sehnlicher Wunsch, daß das von ihm seit langem geplante Studentenheim im ehemaligen Theresianum mit Plätzen für 250 bedürftige und würdige Hörer der Technischen Hochschule in Wien eingerichtet werde.

Professor Doležal verfolgt auch jetzt noch mit ständigem Interesse und regster Anteilnahme Gedeih und Geschick des gesamten Vermessungswesens und es ist zu hoffen, daß er noch lange in seiner bisherigen geistigen und körperlichen Frische zum Besten der Wissenschaft und zum Wohle des Vaterlandes wirken werde.

Buchbesprechungen.

Gasturbinenkraftwerke. Ihre Aussichten für die Elektrizitätsversorgung. Eine Studie. Von L. Musil. Mit 52 Textabb., V, 109 S. Wien: Springer-Verlag. 1947. In Österreich: S 27.—. Im Ausland: sfr 12.—.

Die Gasturbine gilt als moderne Kraftmaschine, da sie erst in jüngerer Zeit — zunächst auf Sondergebieten — praktisch verwertbare Ergebnisse aufweisen konnte. Sie hat sich in erster Linie als Hilfsmaschine durchsetzen können, bei welcher die Frage nach dem Wirkungsgrad nicht zu sehr ins Gewicht fällt, doch war der Weg zu weiteren Anwendungsmöglichkeiten durch die Theorie klar gewiesen: Verbesserung der Einzelwirkungsgrade der am Gasturbinenprozeß beteiligten Strömungsmaschinen, Steigerung der Spitzentemperatur des Kreisprozesses, da diese den thermischen Wirkungsgrad bestimend beeinflußt, d. h. deren sichere Beherrschung durch hochwarmfestes Material bzw. Kühlung, die Anpassung an brennstoffbedingte Voraussetzungen und die Berücksichtigung der betrieblichen Anforderungen in bezug auf Regelung. Nun hat die allgemeine Weiterentwicklung auf den Gebieten der Strömungsforschung einerseits, die metallurgische — und in Ansätzen auch die keramische — Werkstoffentwicklung andererseits die beiden ersten Forderungen soweit erfüllt, daß ein aussichtsreicher Ausgangspunkt für die Anwendung der Gasturbine als Kraftmaschine gegeben erscheint. In der Tat haben im Ausland eine Reihe von Anlagen die Erprobung teils schon mit gutem Erfolg hinter sich, teils wird mit voller Kraft die weitere Entwicklung der Gasturbinenverfahren und ihre Verwirklichung verfolgt. Zudem haben die auf besonderen Gebieten vorgetriebenen Entwicklungsarbeiten (z. B. Abgasturbinen, Strahltriebwerke, Veloxkessel) konstruktive und betriebliche Erfahrungen vermittelt, so daß der Schritt zur Durchführung großzügiger Projekte keineswegs als spekulativ angesehen werden kann. Bei diesem Stand ist es geboten, für Kraftwerksplanungen die neuen Möglichkeiten gegenüber den bisher üblichen Lösungen in Betracht zu ziehen.

Die reiche Erfahrung, die der Verfasser an verantwortungsvollem Platz in der Planung von kalorischen Kraftwerken erworben hat (vgl. z. B.: Musil, L., Die Gesamtplanung von Dampfkraftwerken, Springer-Verlag, Berlin, 1942), läßt ihn dazu berufen sein, mit seiner Studie die Diskussion zu eröffnen.

Ausgehend von der beschränkten Möglichkeit, durch schrittweise Weiterentwicklung der Dampfkraftwerke noch zu einer Verbesserung über den derzeitigen Stand hinaus gelangen zu können, wird auf die bedeutenden Schwierigkeiten hingewiesen, mit welchen man bei diesen zu rechnen hat: Kesselseitig durch die Verwendung jener minderwertigen Brennstoffsorten, auf welche die Krafterzeugung auf Grund volkswirtschaftlicher Erwägungen abgedrängt werden muß, kühlwasserseitig durch den großen, oft nicht mit einfachen Mitteln zu deckenden Bedarf und von der betrieblichen Seite her durch die Unübersichtlichkeit und Empfindlichkeit der verwickelten Schaltungen, auf welche die hochgedrückten Anforderungen punkto Wirkungsgrad führen müßten. Demgegenüber kann man vom Gasturbinen-Kraftprozeß bei mindestens gleichguten, in absehbarer Zeit aber wohl wesentlich besseren Gesamtwirkungsgraden eine bedeutende Vereinfachung der Anlage und weitgehende Freiheit in der Wahl des Brennstoffes erwarten. Nach großliniger, durch klare Schaltpläne unterstützter Darstellung der in Betracht kommenden Verfahren — es entspricht der Aufgabenstellung, daß auch die kombinierten Gasturbinen-Dampfprozesse behandelt werden — findet man die maßgebenden Faktoren einzeln analysiert und ihre Auswirkungen nach dem derzeitigen Stand abgewogen. Eine große Zahl von Diagrammen veranschaulicht die in Formeln hergeleiteten Erkenntnisse. Der Übersichtlichkeit wird auch dadurch gedient, daß auf konstruktive Einzelheiten nicht näher eingegangen wird, sondern nur knappe Hinweise auf diesbezügliche Entwicklungen erfolgen. Besonderes Augenmerk ist der weitgespannten Variationsmöglichkeit der Brennstoffe gewidmet, wobei die speziellen Fragen der Vergasung, Trocknung, Rohgasreinigung sowie die Chancen der Wertstoffgewinnung eingehend erörtert werden. Literaturangaben verweisen hauptsächlich auf europäische Quellen und auch da vorwiegend auf jenen engeren Sektor des Gasturbinenbaues, welchem die Studie dienen soll. Es ist jedoch unbedingt am Platze, darauf hinzuweisen, daß die Bedeutung des vorliegenden Büchleins über den vom Verfasser selbst gesteckten Rahmen hinausgeht. Eine große Zahl von

österreichischen Fachleuten hat in den vergangenen Jahren an den wichtigsten Entwicklungsarbeiten für die Gasturbine maßgeblichen Anteil gehabt, was durch eine Reihe von Veröffentlichungen in den österreichischen Fachzeitschriften nun zum Teil seinen literarischen Niederschlag findet. Gelingt es, einen Kristallisierungspunkt für gemeinsame Verwaltung und Verwertung dieses Wissens zu schaffen, so wäre damit ein neuer Beitrag zur Weltgeltung der österreichischen Technik verbürgt. Es ist zu wünschen, daß eine solche Anregung durch die weite Verbreitung der Studie von L. Musil gefördert wird.

H. Korst, Wien.

Die neue Theorie des Stahlbetons auf Grund der Bildsamkeit im Bruchzustand. Von R. Saliger. Zweite durchgesogene und ergänzte Auflage. Mit 56 Abb., X, 110 S. Wien: F. Deuticke. 1947. S 27.—.

Welch großes Interesse das neue Werk des österreichischen Altmeisters der Stahlbetonlehre in Fachkreisen gefunden hat, wird durch die Tatsache am besten dargetan, daß noch im gleichen Jahr 1947 die zweite, etwas erweiterte Auflage herausgebracht werden konnte. In gewohnt klarer und übersichtlicher Weise wird nicht nur das Gedankengut des vergangenen Jahrzehnts dargestellt, sondern auch eine ganze Reihe neuer Erkenntnisse aus dem Verhalten des Stahlbetons im Bildsamkeitsbereich gewonnen, die Erscheinungen wissenschaftlich unterbauen, die wohl schon lange bekannt waren, mit Hilfe der Elastizitätstheorie aber nicht voll geklärt werden konnten, wie etwa der Spannungsverlauf bei Rißbildungen in Zuggliedern und Balken.

Die Betrachtung des Stahlbetons im Bruchzustand erfordert ein genaueres Eingehen auf die Gesetzmäßigkeiten, die zwischen Belastung und Formänderung bestehen. Im ersten Abschnitt werden diese Gesetzmäßigkeiten in mathematische Formeln gebracht, die den späteren Entwicklungen zugrunde gelegt werden. Der Vorteil der neuen Theorie zeigt sich schon bei Ermittlung der Haftlängen der Stahleinlagen, die in Abhängigkeit von den Baustoffeigenschaften, ausgedrückt durch das Verhältnis β_s : Stahlstreckspannung : Prismenfestigkeit, dargestellt werden.

Im zweiten Abschnitt über zentrisch belastete Druck- und Zugstäbe, deren Berechnung im Bildsamkeitsbereich schon Eingang in die DIN 1045 gefunden hatte, wird gezeigt, daß der höherwertige Stahl nur mit höherwertigem Beton zu kombinieren ist, daß die Umwehrung von umschnürten Säulen erst im Bildsamkeitsbereich voll zur Wirkung kommen kann und daß das Schrumpfen des Betons zufolge Schwinden und Kriechen zu Spannungsverlagerungen vom Beton auf die Stahleinlagen führt. Für die Säulenknickung werden Knickzahlen und Schlankheitsgrenzwerte entwickelt. Im Anschluß an die Berechnung von Zuggliedern wird die Theorie der Rißbildung bei reiner Zugbeanspruchung und zufolge des Schwindens entwickelt.

Für die Erfassung der Spannungen des Stahlbetonbalkens im Bruchzustand werden im dritten Abschnitt die Arbeitslinien des Betons und Stahls idealisiert. Die Gültigkeit des Hookschen Gesetzes wird bis zu $\frac{2}{3} \sigma_p$ und erst darüber hinaus Bildsamkeit des Betons angenommen. Das Spannungsverteilungsgesetz in der Balkendruckzone wird durch den Beiwert $k = 0.85$ derart beschrieben, daß die resultierende Druckkraft $D = k \cdot b \cdot x \cdot \sigma_p$ und ihr Abstand vom Druckrand $y = 0.5 \cdot k \cdot x$ gesetzt wird. Die Festlegung dieses Beiwertes mit 0.85 erfolgt ohne Berücksichtigung der Stauchfähigkeit des Betons, die der Verfasser zwischen 2 und $8 \cdot 10^{-3}$ schwankend angibt. Die Arbeitslinie des Stahls wird in Gerade zerlegt, die bis zur unteren Streckgrenze mit konstantem E , im Streckbereich mit konstantem σ_s und im Verfestigungsbereich durch eine ansteigende Gerade zur 1.3fachen Streckspannung mathematisch erfaßt wird. Die Tatsache, daß dem höherwertigen Stahl ein kürzerer Streckbereich zugeordnet ist, wird benutzt, um die oberen Streckgrenzen zwischen den Streckspannungen 2400 und 7200 kg/cm^2 geradlinig einzuschalten. Mit diesen idealisierten Spannungs-Dehnungsgesetzen werden die Spannungszustände für starke, mittlere und schwache Bewehrung, letztere unterteilt für Stähle mit und ohne Streckbereich, untersucht und in Diagrammen anschaulich dargestellt. Im Anschluß an Untersuchungen über die Rißbildung werden bemerkenswerte Erkenntnisse über die Abhängigkeit der Anrißspannungen, Rißweite und Rißabstände vom Bewehrungsanteil, Haftwiderstand und der Betongüte gewonnen und dargelegt, daß die Stahlspannungen, verursacht durch die Rißbildungen, wellenförmig zu- und abnehmen. Daraus werden die möglichen Höchstspannungen der Baustäbe im Verfestigungsbereich abgeleitet und damit die aus Versuchen schon lange bekannte Tatsache der Hebung der Streckspannung beim Balkenbruch auf $\sigma_{es} = 1.1$ bis 1.3 σ_s erklärt. Die gute Übereinstimmung der nach der neu entwickelten Theorie ermittelten Momentenfähigkeiten mit den Messungen an Versuchsbalken wird in zwei Schaubildern dargestellt und in einer anschließenden Kritik dargelegt, daß nur die gleichzeitige Berücksichtigung der Bildsamkeit von Beton und Stahl zur richtigen Erfassung des Bruchzustandes im Balken führt. Ein Vergleich dieser Momentenfähigkeiten mit den nach dem Elastizitätsverfahren errechneten führt zu der Folgerung, daß die Betonrandpressungen nach Zustand II kein Maß für die Balkensicherheit darstellen. Nach einem Vergleich der nach Zustand II errechneten Biegendruckfestigkeit mit der echten Biegendruckfestigkeit, die gleich der Prismenfestigkeit ist, wird vorgeschlagen,

die an stark bewehrten Balken ermittelte Prismenfestigkeit als Maß der Betongüte festzulegen. Die Bemessung wird auf die gewohnte Form $h = a \cdot \sqrt{\frac{M}{b \cdot \sigma_y}}$ gebracht, worin die Höhenziffer a vom Produkt $\beta \mu$ abhängig gemacht ist. Tafeln für Höhenziffern, Nulllinienabstände, Hebelarme und Momentenfähigkeiten sollen die Rechnung vereinfachen. In einer weiteren Tafel werden die Grenzbewehrungen, über welche hinaus eine nennenswerte Steigerung der Tragkraft nicht mehr erreicht werden kann, in Abhängigkeit von den Baustoffgüten zusammengestellt. Die zweite Auflage bringt anschließend ebensolche Betrachtungen über die Mindestbewehrungen und die Berechnung des druckbewehrten Rechteckquerschnittes. Abgeschlossen wird dieser Abschnitt mit der Berechnung der Plattenbalkenquerschnitte.

Der vierte Abschnitt zeigt die Berechnung exzentrisch gedrückter Rechteck- und Plattenbalkenquerschnitte sowie beliebig gestalteter, einachsiger symmetrischer Querschnitte.

Im folgenden Abschnitt wird auf Grund der Auffassung des Stahlbetonbalkens als Fachwerkträger die Frage der Schubbewehrung behandelt und auch auf die Druckbeanspruchungen des Stegbetons und auf den Einfluß von Querpressungen auf die Hauptspannungen und damit auf die Schubbewehrung eingegangen.

Der sechste Abschnitt zeigt den Weg zur Berechnung der Formänderungswinkel im bildsamen Bereich und kommt über den Begriff der Fließgelenke zur Erkenntnis, daß die Kraftwirkungen innerhalb gewisser Grenzen vom schwächeren Bauteil auf den stärkeren verlagert werden. Beim idealen Bauwerk, bei welchem alle stark beanspruchten Teile gleichzeitig in den bildsamen Bereich kommen sollen, wird daher kein Fehler gemacht, wenn die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach den bewährten Methoden für den Zustand I erfolgt.

Im siebenten Abschnitt werden nach einer Zusammenfassung der Ergebnisse der neuen Theorie Vorschläge für die Bestimmungen zur Berechnung von Stahlbeton gemacht und die Vorschriften für Stahlbeton in der Sowjetunion, die auf der Berechnung des Stahlbetons im bildsamen Bereich basieren, kurz besprochen.

Auf sehr knappem Raum hat der Autor eine neue Theorie des Stahlbetons entwickelt, die eine weit bessere Anpassung der Rechnung an das wirkliche Verhalten des Stahlbetons im Bruchzustand ergibt. Das Werk darf als Wegbereiter einer weiteren Entwicklung der Stahlbetontheorie bezeichnet werden. Sein Studium wird dem gewieгten Fachmann ebenso reichen Nutzen bringen wie dem Studenten.

F. Ponratz, Wien.

Allgemeine Hochfrequenztechnik. Von F. Kracmar. Erster Teil: Physikalische Grundlagen. Mit 134 Abb., 198 S. Wien: Universum Verlagsges. m. b. H. 1947.

Bei der Bedeutung, welche die Hochfrequenz heute besitzt und dem großen Interesse, dessen sie sich in weiten Kreisen erfreut, besteht ein Bedürfnis nach nicht zu umfangreichen, verhältnismäßig leicht faßlichen, aber doch zuverlässigen Einführungen. Diesem Zweck ist der vorliegende Band gewidmet, dem ein zweiter über „Ultrahochfrequenztechnik“ folgen soll.

Der vorliegende erste Teil beginnt mit den Schaltelementen der allgemeinen Hochfrequenztechnik, erörtert sodann den geschlossenen Schwingungskreis, die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, die Antenne und schließt mit einem Kapitel über die physikalischen Grundlagen der Elektronentheorie.

Die Darstellung ist durchgearbeitet, klar und entspricht durchaus dem angestrebten Zweck.

Auf S. 39 befindet sich eine Formel, (40a), die eine kleine Ungenauigkeit enthält, aber unbesiehen die Jahrzehnte hindurch unverändert von Lehrbuch zu Lehrbuch übernommen wird. Die Berechnung der Elektrizitätsmenge durch ein unbestimmtes Integral ist nicht ganz korrekt, da auch die anfängliche Elektrizitätsmenge zu berücksichtigen und der Beginn der Zeitzählung anzugeben ist. Wenn auch das Endergebnis hiervon unberührt bleibt, so soll doch auch auf solche Kleinigkeiten geachtet werden.

Das Buch ist jedem, der sich für Hochfrequenz interessiert und eine klare, leicht lesbare Einführung sucht, wärmstens zu empfehlen.

L. Kneissler, Wien.

Berichtigung.

Österr. Ingenieur-Archiv, Band II (1948), Heft 2, S. 119, 120, 122; H. Watzlawek, Sphärische Aberration dünner Einzellinsen nach D. Argentieri.

In den Gleichungen (19, 24, 24a u. 33) fehlen die linken Seiten. Es ist überall einzusetzen: $(\Delta s') = \alpha = \dots$

Vor kurzem erschien:

Natur und Erkenntnis

Die Welt in der Konstruktion des heutigen Physikers

Von

Arthur March

Professor für theoretische Physik an der Universität Innsbruck

Mit 18 Abbildungen. VIII, 239 Seiten. 1948. In Österreich S 36.—; im Ausland sfr. 18.—

Das Buch wendet sich an jeden, der sich über die der modernen Physik zugrunde liegenden Ideen zu unterrichten wünscht, und vermittelt dem Leser in glänzender Darstellung Verständnis für den erkenntnikritischen Geist, aus dem die letzten entscheidenden Entdeckungen der Physik hervorgegangen sind.

Vor kurzem ist erschienen:

Ergänzungen zur Experimentalphysik

Einführende exakte Behandlung physikalischer Aufgaben, Fragen und Probleme

Von

Dr. H. Greinacher

o. Professor der Physik an der Universität Bern

Zweite, vermehrte Auflage

Mit 82 Textabbildungen. X, 186 Seiten. 1948. In Österreich S 26.—; im Ausland sfr. 12.—

Das Buch bildet eine Herausgabe von Vorlesungen, die der Verfasser an der Universität Bern in Ergänzung zu seinen Vorlesungen über Experimentalphysik hält. Es wendet sich aber nicht nur an alle Studierenden, die Physik als Haupt- oder Nebenfach studieren, den angehenden Physiker, dem es den Übergang zum Studium der theoretischen Physik erleichtern hilft, sondern darüber hinaus auch an den größeren Kreis jener, die sich für physikalische Fragen und Probleme interessieren. Die zweite Auflage ist gegenüber der ersten Auflage, die 1942 erschien und innerhalb zweier Jahre ausverkauft war, revidiert und um zwei Kapitel und eine Reihe weiterer Aufgaben vermehrt worden.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Die Verbrennungskraftmaschine

Herausgegeben von

Prof. Dr. **Hans List**, Graz

Erscheint in 16 Bänden, die in sich abgeschlossen und einzeln käuflich sind

Soeben wurde ausgeliefert:

Band 9:

Die Steuerung der Verbrennungskraftmaschinen

Von

Prof. Dr. techn. Ing. **A. Pischinger**, Graz

Mit 269 Abbildungen. VII, 240 Seiten. 1948. In Österreich S 120.—; im Ausland sfr. 60.—

Auf Grund der Erfahrungen, die der Autor in seiner Tätigkeit in der Industrie, als Hochschullehrer und als Leiter eines Forschungsinstitutes gesammelt hat, ist er der berufene Fachmann, das Gebiet so darzustellen, daß das Werk sowohl dem Studierenden als auch dem fortgeschrittenen Ingenieur zur Erweiterung seines Wissens wird verhelfen können. Die Ausführungsbeispiele wurden zum größten Teil aus dem Gebiete des Fahrzeug- und Stationärmotors gewählt, wogegen der theoretische Teil gleichermaßen auch für andere Sonderkonstruktionen gilt.

Ferner liegen vor:

Band 8, Teil 2: **Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine.** Von Prof. Dr.-Ing. **H. Schrön**, München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 187 Abbildungen. VIII, 201 Seiten. 1948. In Österreich S 72.—; im Ausland sfr. 36.—

Band 12: **Ortsfeste und SchiffsDieselmaschinen.** Von Ob.-Ing. **F. Mayr**, Augsburg. Zweite, unveränderte Auflage. Mit 318 Abbildungen. VIII, 330 Seiten. 1948. In Österreich S 128.—; im Ausland sfr. 64.—

*Von den in Vorbereitung befindlichen weiteren 13 Bänden werden im Sommer
bzw. Herbst 1948 erscheinen:*

Band 1, Teil 1: **Betriebsstoffe.** Von Priv.-Doz. Dr. **A. Philippovich**, Wien. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 80 Abbildungen. Etwa 160 Seiten.

Band 4: **Ladungswechsel.** Von Prof. Dr. **H. List**, Graz.

Band 10: **Das Triebwerk schnellaufender Verbrennungskraftmaschinen.** Von Ob.-Ing. **H. Kremser**, Graz. Zweite, neubearbeitete Auflage.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N